川崎市総合教育センター研究紀要８：171－184．1995

平成６年度

動的扱いによる図形の性質とその証明方法の発見過程における作図ツールの効果的な活用方法の研究

川崎市総合教育センター　算数・数学コンピュータ教育利用研究会議

動的扱いによる図形の性質とその証明方法の発見過程における作図ツールの効果的な活用方法の研究

算数・数学コンピュータ教育利用研究会議

山下　忠徳[1]　中町　喜友[2]　福地　誠[3]　小林　達也[4]　馬場　英顯[5]

要　　約

コンピュータを使えば，条件に合う平面図形をかき，その図を連続的に変形していくことによって図について大量の情報を手にいれることができる。このような機能をコンピュータに持たせるソフトウエアを作図ツールと呼ぶ。作図ツールを使うことによって，図形の性質について子どもが仮説を立て，それを確かめるために必要な図を素早く実現することが可能になってきた。平面図形の学習において探究の過程を中心とする授業が容易に実現できるようになってきたともいうことができる。

作図ツールを利用することによって探究活動が深まっていくようにするには，それに相応しい課題が必要である。また，図から何を読み取り，どんな仮説を立て，それを確かめるためにコンピュータに必要な指示ができる力を育てなくては，期待する探究活動は生まれてこない。図形の基本的な性質を学習する段階から子どもの探究活動を中心に据えていくには，単元の構成についてもこれまでとは異なることが求められる。

本研究では，子どもが仮説を立て，それを確かめながら探究していく活動を「数学をつくりあげる」活動と呼び，次のことを明らかにしていく。

(1)　作図ツールを使って探究するのに適した課題をつくり，そこから生まれてくる探究活動を分析する。

(2)　子どもが作図ツールを使って探究していく力を育てるにはどのような指導が必要かを事例研究する。

(3)　探究過程における教師の役割を明らかにする。

(4)　数字をつくりあげる活動を中心にした図形単元の指導計画案を作成する。

キーワード：数学教育，図形学習，教材分析，コンピュータ，課題解決学習，授業研究

目　　次

[1]川崎市立南河原中学校（主任研修員）
[2]川崎市立向丘中学校（研修員）
[3]川崎市立稲田中学校（研修員）
[4]川崎市立新作小学校（研修員）
[5]川崎市総合教育センター研修指導主事

はじめに

作図ツールを利用して図形の学習を，探究的・創造的な活動として組み立てようとする試みが広がっている。

コンピュータを使って平面図形をかき，その任意の点を移動して図形を変形し，そのことによって浮かび上がってくる性質について子どもが仮説を立て，検証していく活動を重視しようというのである。既に解き明かされた数学的な結果をただ受け入れるのでなく，子どもが問題を見つけそれを解決していく過程を重視する考え方がその背景にある。

数学的な探究過程を子どもに体験させる授業は，これまでにもいくつか試みられてきた。与えられた問題を解決した後にその問題を原題として，原題の条件を変更して別の問題をつくっていく授業はその１つである。他にも多様な見方が可能な図形について，予め結論を示さないでそれぞれの子どもが探究していくという活動を重視した授業，問題場面から数学的な問題を作り上げていく活動を組み入れた授業等がある。これらは「数学する」活動を重視する授業だと言うことができる。子どもが，「数学する」ことによって既習事項がより緊密に再構成され，数学的概念や数学的な考え方が育っていくと考えられる。

コンピュータは図形学習における「数学する」活動を支援する道具として極めて効果的である。それはこれまでは試みられることが少なかった，子どもが仮説を立て必要な情報を収集し，検証していくという活動を実現する可能性を持っている。

何らかの方法によって図形の基本的な性質について学習を終えた後で，それらの性質を基に作図ツールを使って探究していくという授業については，これまでにかなり研究が積み重ねられてきた。[1]

しかし，子どもに豊かな数学的活動の機会を提供するには，それだけでは充分とは言えないように思われる。子どもが初めて出会うような図形の性質について学習するときには，基本的な性質を学習する段階から探究的，構成的な活動をすることが重要だからである。

図形の基本的な性質を学習する段階から子どもが仮説を立て，それを確かめていくという学習活動を「数学をつくりあげる」活動と呼ぶことにした。本研究では数学をつくりあげる過程で子どもが作図ツールを効果的に活用できるようにするために，解決しなければならない問題を明らかにし，その解決策を研究するとともに単元毎にその指導計画の試案を作成することを目的とする。

Ⅱ　主題設定の理由

(1)　どのような活動を通して何を学ばせるか

同じ数学的内容でも，それをどのような活動を通して学ぶかによって大きな違いが生じる。数学には「数学的活動の結果生まれた知識体系としての数学と，数学的活動そのものとしての数学」という二つの側面がある。[2] 数学的活動そのものとしての数学とは，先に述べた「数学する」活動，本研究の「数学をつくりあげる」活動自体に含まれる探究の過程や思考をさしていると考える。

条件を満たす図形をかいて，変形しながらその性質について予想を立てる。「図のここをこうしたらどんな事が成り立つだろう」と考えながら探究して得た事柄は，探究の過程で既習事項やそのときに持っている考え方を再統合した結果でもあるので，新たな問題場面で有効に機能する知識になることが期待できる。

このように考えると，同じ数学的内容でもそれをどのような学習活動を通じて学んでいくかが問われなくてはならない。探究の過程は子どもによって異なっている。個別の探究だけでは学習が深まらない不安もある。だから集団による探究との関係も検討する必要もある。

これらのことから次の問題が浮かんでくる。

(ｱ)　どの性質・定理についてどの学年で「数学をつくり上げる」活動を計画するのがよいか。

(ｲ)　定理や性質についてどんな学習活動を計画するか。

(ｳ)　探究過程における議論の機会を，授業のどこに配置し，何について議論し，それによって何を明らかにするのか。

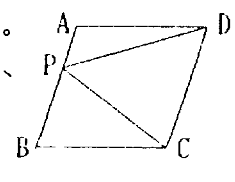
(2)　どんな課題が必要か。

「数学をつくり上げる」活動をするには，それに適した課題が必要である。ではどんな問題が適しているのだろうか。既成の問題をどう改作すればよいのだろうか。

たいていの問題には，下図の例のように図が添えられており，証明すべき結論が示されている。

例（中２：問題集）

平行四辺形ＡＢＣＤがある。
辺ＡＢ上に点Ｐがあるとき、
△ＰＣＤ＝½▱ ＡＢＣＤ
を証明しなさい。



---

[1] Geometric Constructor（愛教大　飯島），Geo／BLOCK（日本IBM），Geometric Supposer（米），CABRI Geometri（仏），他

[2] 「問題から問題へ」竹内・沢田（1988），ｐｐ12．フロイデンタールの説より

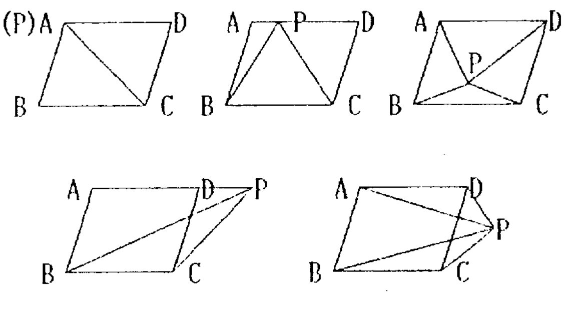
同じ条件の下でも辺ＡＢ上の点Ｐの位置によって色々な図がかける。図が示されていると，与えられた条件を満たす多くの図の中の代表元としてみる見方が育ちにくい。また，結論が予め示されていると自分が発見したことではないので，結論の正当性についての不安がなく，証明の必要性を感じ難い。

先の例を次のような問題に改作してみた。

課題

平行四辺形ＡＢＣＤがある。点Ｐを任意にとり，各頂点とＰを結ぶ。どんなことが言えるか。

図Ｉ



図Ｉのように，点Ｐを動かして図が簡単になる場合について調べ手掛かりを得たり，点Ｐが外部にある事を調べたりすることが期待できる。さらに，平行四辺形を他の四角形に変えてみたりして，その性質がどう変わるかという探究に発展させていくこともできる。

このことから，課題について次のような問題が浮かんでくる。

(ｱ) 基本的な性質を探究するためには，どんな課題をつくる必要があるのだろうか。

(ｲ) その課題によってどんな学習活動が引き出せるか。

(3) 課題をどんな順序で扱うか

数学をつくり上げる活動を中心に学習を展開すると，課題によってはその課題の図に含まれている性質が教科書の順序とは関係なく互いに関連する性質として同時に出現する。場合によっては，一箇所でのつまずきがその後の学習に大きな影響を与える心配もある。だから課題の順序については慎重に検討する必要がある。ある課題を探究するためには，どんな性質や定理を知っている必要があるのかを分析しておくことも重要である。

教科書では別の問題として扱われているが，より一般的な問題のもとに統合できる場合もある。教科書に掲載されている問題の相互関係も分析しておく必要がある。

このことから，次の問題が浮かんでくる。

(ｱ) それぞれの課題からどんな性質が発見される可能性があるか。

(ｲ) それぞれの課題を探究していくためにどんな定理や性質を必要とするか。

(ｳ) 教科書にある問題にどんな相互関係があるか。

(4) 教師はどう関わるとよいか

人間は必要な情報を全て頭の中において考えるのではなく，一部を内部に，他を外部においてその間で相互作用しながら考えているという[3]。作図ツールを使うと，考えている過程がディスプレイに現れてくる。それは，コンピュータを介して自分と対話しながら考えているという状況に近い。

教師はディスプレーに表示されている事から，その子が図のどこに注目し，何をしようとしているのか，どんな予想を立てているのかをかなり推測することができ，これまでよりも子どもの探究過程に関与することができるようになる。

このことから次の問題が浮かんでくる。

(ｱ) 探究している子どもの画面の何を見て，どう解釈するか。

(ｲ) 探究過程のどこで関与しどんな手だてを講じるか。

(5) 作図ツールを使って探究する力をどう育てるか。

① 探究のためにどんな能力が必要か。

コンピュータを使うことで探究が深まるのは確かだがコンピュータを使えば自動的にすべての子どもが深く探究できるようになるわけではない。コンピュータは子どもが指示したことを実現するだけである。図のどこに注目し，そこから何を読み取り，どんな仮説を立て，それを確かめるために何をするのかを決めるのは，コンピュータを使っている当の子どもである。だから等しい辺や角はないか，特別な形の図形や合同・相似な図形はないか，いつも一定の関係はないか，この点を移動しても性質は変わらないだろうか等の「構え」を持つことが必要である。漠然と図を変形しているだけでは，見えるものも見えなくなる。

このことから次のような問題が浮かんでくる。

(ｱ) 図に潜む情報を読み取るようにするには，どんな

---

[3] 「思考の道具―教育」のミッシング・リンク（「現代思想」論文集　1991．6　美馬のゆり）

「構え」を育てておくのがよいのだろうか。

(ｲ) 図を読みとり，仮説を立てる力を育てるためにはどのような指導の段階を踏んで行くのがよいのだろうか。

② 作図ツールのどんな機能を使えるようにしておくか

どの作図ツールも様々な機能を持っている。それらの全てを使えるにこしたことはないが，ツールの機能を習得するのに時間を取られ過ぎては何のためのツールか，分からなくなる。また，文章を基に条件に合う図を自分でかく事は重要なことではあるが，いつも子どもに作図ツールでかかせるのが良いとはいえない。課題によっては特殊な手順を踏まなければならない場合もある。

これらのことから次のような問題が浮かんでくる。

(ｱ) 期待する探究活動をするためには，どんな機能が使えればより効果的か。

(ｲ) どんな場合は，作図ツールを使って図をかかせるのがよいか。それができない場合はどうするのがよいか。

Ⅱ．研究の方法

(1) コンピュータを使って図をかき変形する作図ツールとして，現在豊富で系統的な研究を蓄積している愛知教育大学の飯島康之助教授が開発した Geometric Constructor（以下ＧＣと略）を利用する。

(2) 基本的な性質を探究していく段階で扱う課題として教科書や問題集に登場する問題をＧＣで作図し，数学をつくり上げる活動に適した問題につくりかえる。さらに必要によっては，期待する活動を実現するための新しい課題を開発する。

三角形や四角形の基本的な性質については小学校で学習している事を踏まえ，どこでどのような探究学習をするのがよいのかを検討する。

(3) 単元の導入段階から数学をつくり上げる活動を通して，図形の性質を探究していく単元指導計画の試案を作成する。

(4) 課題の提示や発問の仕方，予想される反応に対する具体的な手立てを検討する。試行錯誤をしながら探究している子どもに，教師は何処でどのように関わるかを探る。探究の視点を明確化するために，何について議論させ，その事によって何を明らかにしていくのかを事例研究する。

(5) １台のコンピュータで教師と子どもが対話をしながら図のどこに注目し，どんな予想を立て，それを確かめるためにコンピュータに何を指示すれば良いかについて，子どもがケーススタディをする。この機会を通じて子どもがＧＣを使って深く探究していく方法を身につけるための指導をする。

(6) ＧＣのどの機能を子どもが使えるようにしておくとよいかを，それぞれの課題に沿って明らかにする。他の発見の補助具についても検討し，効果的な使い方を探る。

Ⅲ．研究の内容及び考察

教材分析と課題から生まれる探究活動

一年目の研究では，中学２年「三角形と四角形」・中学３年「円」単元において，教科書の問題をＧＣで作図し，課題学習的な活動を通して探究の道具として効果的に使う方法について検討した。

また小学校３年「二等辺三角形」の単元では，子どもがコンピュータを使って，基本的な性質をどのように探していくのかについて分析した。

二年目の研究では「子どもにどのような活動を通じて何を学ばせたいのか」を念頭におき，先に述べた方法にそって，事例研究をした。

教科書の図をそのままＧＣに取り込んで分析してみたが，興味ある問題はあまりつくりだせなかった。そこで問題集もあわせ分析し検討した。

「平行」を「垂直」にかえるというように，問題の条件を変更し問題をつくったが，次のような観点から図をつくりかえる事にした。

(1) 図中の線を消してみる。
(2) 図中の線分を直線や半直線にかえてみる。
(3) 円周・直線上に束縛されている点を自由にしてみる。
(4) ～ を動かさないように ～ を動かす。
　　～ を変えないように ～ を動かす。
(5) 図を離す，つける，交じわらせる。

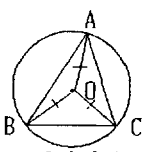
図を分析し，つくりかえた課題から生まれる探究活動について，以下に４つの事例を上げる。

事例１

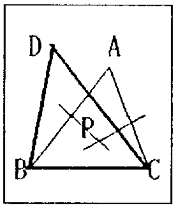
(1) 教材のつくりかえ

中３教科書「円」（三角形の外接円の説明）

△ABC の辺AB,BC のそれぞれの垂直二等分線の交点をＯとする。線分の垂直二等分線上の点からその線分の両端までの距離は等しいから、OA=OB,OB=OC 。従ってOA=OB=OC、そこでＯを中心としてOAを半径とする円をかくと△ABC の頂点を通る



教科書には三角形の外接円について上記のように説明されている。結論を与えて証明するのではなく，三角形の三つの辺の垂直二等分線が一点で交わること，その点を中心に三つの頂点を通る円がかけること自体を子どもが発見していくような探究学習を計画したいと考えた。

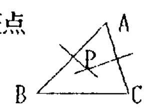


左の図は佐々木棟明氏がコンピュータを使って，三角形の垂直二等分線の交点について子どもに探究させたときの課題の図である。[4] 佐々木氏は，△ＡＢＣの二辺の垂直二等分線の交点と辺ＢＣを共有する△ＤＢＣのＤＢ，ＤＣの垂直二等分線の交点とは同じになるだろうかと質問している。レポートでは交点の軌跡を調べ，辺ＢＣの垂直二等分線になることを見つけるところまで探究させている。既に三角形の外心を学習している高校生でも，外心に関連づけることはできなかったとある。この課題と発問では，交点Ｐが辺ＢＣの垂直二等分線上を動くことに気づいても外接円にまでは考えが及び難いと思われる。

この課題をもとに，点Ａを動かすと点Ｐの軌跡が辺ＢＣの垂直二等分線になり，点Ｐを動かさないよう点Ａを動かすとその軌跡が円になることを利用して，次の二つの課題につくり変えた。この課題によって三角形の外心と外接円を子どもが発見し，外接円から円の性質までを探究していく学習が可能になるのではないかと考えた。

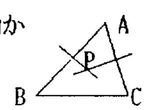
課題１－１

△ABC で辺AB,AC の垂直二等分線の交点をＰとする。点Ａを自由に動かすとき交点Ｐはどのように動くだろうか。



課題１－２

交点Ｐを動かさないように、点Ａを動かすことはできるだろうか。できるならその点Ａはどんな線の上に並ぶか。



(2) 課題１－１についての探究活動と教師の関わり

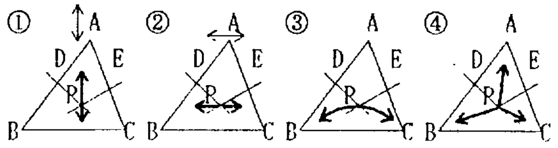
この事例で明らかにしたかったこと

① 教師と子どもが対話しながら，一台のコンピュータを使って探究していくことで，子どもが探求方法を学んでいくことができるようにするには，どのような対話をするのがよいか。

② 図を変形して漠然とした予想について考えるための図をつくることで，探求が容易になるか。

この課題では，子どもは次のような予想を立てる可能性がある。

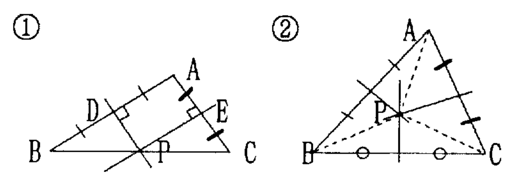
予想される反応



図を変形する前に「点Ａを動かすと点Ｐはどうなると思いますか」と質問した。それに対して「点Ａをたてに動かすと点Ｐもたてに動く」「点Ａを横に動かすと点Ｐも横に動く」「点Ａの動きについてくる」「動かない」などの反応が返ってきた。しかしこの時点での予想には根拠はあまりない。

点Ａを横に動かしたときに，予想と違って点Ｐが縦に動くので驚きの声が上がった。「もっと大きく動かしてみよう」と，たて，横，斜めと，自由な方向に動かしてみせ，点Ｐの動きをはっきりさせた。たての直線に沿って動くことがはっきりしたところで「この直線はどんな直線なのだろう」と質問した。ＢＣに垂直な直線のようだという反応がすぐに返ってきた。続いて「ＢＣとどこで交わる直線なのだろう」と質問した。「ＢＣの中点を通るのではないか」という反応が数名から返ってきた。それを確かめるために「実際にその場合に当たる図をつくってみよう」と問いかけ，次の図の①のように点ＰがＢＣ上にくる場合の図に変形した。この図について検討して，点Ｐが辺ＢＣの中点であることが説明できた。

点Ｐが辺ＢＣの中点を通る直線であることが説明できれば，②の図のようにそれが辺ＢＣに垂直であることも



容易に説明できる。最後のＧＣの測定機能の紹介を兼ね

[4] 「数学教育におけるコンピューターの機能」　学芸大数学教育研究　第３号　1991，Ｐ136～Ｐ137（佐々木棟明）

て，そのことを測定によって確かめておいた。

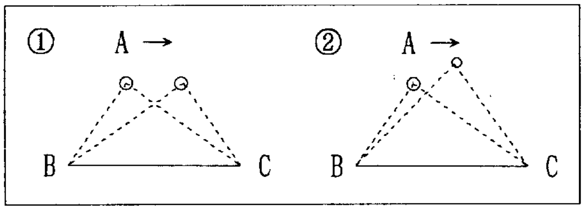
(3) 課題１－２についての探究活動と教師の関わり

この事例で明らかにしたかったこと

① どんな反応をどんな時に皆に伝えるのがよいか
② 大胆な変形から見つかったことをどう生かすか
③ この課題は外心の探究学習に適しているか

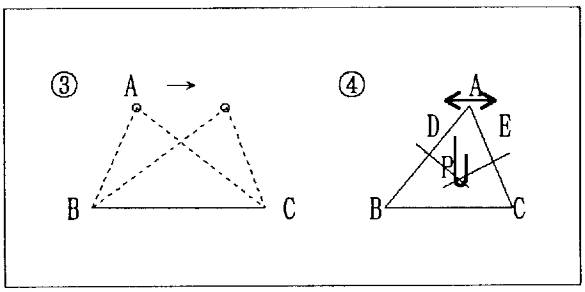
画面にＴＰシートを貼って，その上に点Ｐと点Ａの最初の位置を記入させた。「点Ｐが動かないように点Ａを他の位置にとることができるかどうか探してみよう」と問いかけたところ，次のような探究が見られた。

(ｱ) 最初の位置の近くで試行錯誤しながら探す



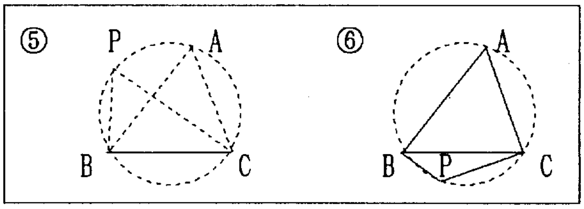
(ｲ) 点Ａを横に動かすと点ＰがＢＣの垂直二等分線上を往復する動きに注目して探す

数名の子どもがこのような探究をした。点Ｐが往復するのだから同じ点を通る場合が少なくとも二回はあることを生かした考え方である。これは試行錯誤的に探すよりも洗練された方法である。



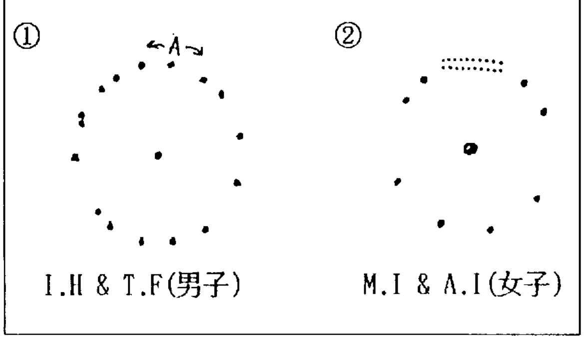
点Ｐが動かないように保って点Ａを別の位置にとることができることが分かったところで，互いの図を見比べさせて，「できるだけたくさん探してＴＰシートの上に印をつけ，点Ａがどのように並ぶかを調べなさい」と発問した。

直線上に並ぶのではないかという予想をする子がいたが，③の図を全員に転送したことで離れた位置に探す動きが増えた。しばらくして「円になりそうだ」という声が出始めた。そのことから「この辺りにもありそうだ」と見当をつけて探す動きが見られるようになってきた。もっぱら試行錯誤的に探している子には「どのあたりにありそうですか」という問いかけをしたのは見当をつけて探すように仕向ける上で効果があった。



⑤のような図ができ上がってきたが，その内に反対側ではどうだろうと考え⑥のような図をかいた子も出てきた。反対側に点Ａを動かした図もＬＡＮを使って全員に転送し「こうしたらどうなるだろう」という問いを子どもが生み出していく機会をつくるようにした。

ＴＰシートにプロットされた点Ａの軌跡



事例２

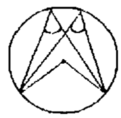
この事例で明らかにしたかったこと

① 同じ弧に対する円周角は等しいことを学習してから内接四角形や接弦定理を扱ったほうがよいかそれとも，一緒に扱った方がよいのか。
② 期待する疑問がどこまで子どもから出てくるか出ないときはどんな発問をするのがよいか。
③ ノートとコンピュータをうまく組み合わせて探究を深めるにはどう組み合わせるのがよいか。
④ この課題で「接線」をどのように導入するか。

(1) 課題

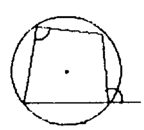
中３教科書「円」（円周率の定理）

１つの弧に対する円周角はすべて等しく、その弧に対する中心角の　½に等しい。



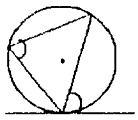
中３教科書「円」（内接する四角形の性質）

・円に内接する四角形の対角の和は 180° である
・円に内接する四角形の１つの内角はその対角の外角等しい



中３教科書「円」（接線と弦のつくる角）

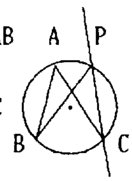
円の接線とその接点を通る弦のつくる角はその角の内部にある弧に対する円周角に等しい



上の定理は教科書にある代表的な定理であるが，互いに関連する定理としてとらえていない子どもが多い。これらの定理を子どもが発見し，相互に関連した定理としてとらえられるようにするために，次のような課題につくり変えた。

課題２

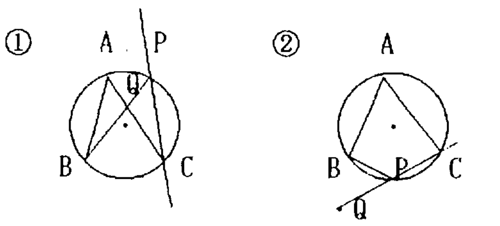
円Oの円周上に４点A,B,C,D をとりAB ,AC,BDを結ぶ。CPを通る直線を引く。点Ｐが円周上を動く時、∠BAC=∠BPC 以外に、どんな関係が成り立つか。



円周角と中心角の関係について学習した後に続けてこの課題について探求する場合と，同じ孤に対する円周角は等しいことを学習した後でこの課題について考える場合とが考えられるが，今回は後者を選んだ。

(2)　課題２についての探求活動と教師の関わり

この課題では次のような探求が見られた。



(ｱ)　$\overset{\frown}{BAC}$の側で点Ｐを動かして調べる（①の図）

- ∠ＢＡＣ＝∠ＢＰＣ（今回の流れでは前時に既習）
- ∠ＡＢＰ＝∠ＡＣＰ
- △ＡＢＱ∽△ＣＰＱ

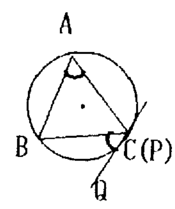
(ｲ)　②の図の場合をつくって調べる

この図のように変形していた子どもから，この場合は∠ＢＡＣ＝∠ＢＰＣが成り立たないという意見が出た。他にも，この図をつくってはみたが∠ＢＡＣ＝∠ＢＰＣが成り立たないので探求を止めたり，ＰがＢやＣを越える瞬間に画面から直線ＣＰが消えてしまうのに驚いて①の図に戻っている子どもがいた。この場合も「成り立たない」ことには気づいていたといえる。

ここで小さな「議論」が生まれ，同じ側にあるときだけ∠ＢＡＣ＝∠ＢＰＣが成り立つという結論になった。

そこで，②の図をとりあげ「点Ｐを反対側に移動したときには∠ＢＰＣはどうなるのだろう」と問いかけた。ＧＣは角度の測定機能を持っている。それを使って自分が注目した角について測定しながら調べさせた。しばらくして，「和が180゜になる」「∠ＢＰＱと等しい」ということが指摘され始めた。

このことを整理した後「他に気づいたことはありませんか」と質問すると，「線が消える」という声が数名から出た。点Ｐが点Ｃと重なる瞬間，直線ＣＰが消えるというのである。「その場合は，直線ＣＰはどうなると思いますか」と質問した。ＧＣを操作して点Ｐを点Ｃの近くで動かして直線ＣＰの動きを観察し，そのことから類推してノートの図に左の図の直線ＣＱをかき足す子どもが出てききた。



「この場合は角の関係はどうなるるのだろう」と質問すると，ＧＣを操作して点Ｐを点Ｃの近くで動かしながら，∠ＢＣＱが∠ＢＡＣに等しいのではないかという予想を立てることができた。

事例３

この事例で明らかにしたかったこと

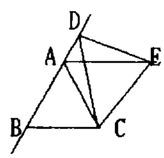
①　この課題では，ＧＣを使って図を大きく変形することが証明方法の発見に役立つと思われるが，子どもにとってはどうか。

②　子どもがＧＣのどの機能を使えるようにしておくと探求が深まるか。

(1)　課題

原題（問題集から）

正三角形ABC の辺ＢＡの延長上に点Ｄをとり△ＤＣＥが正三角形になるように点Eをとる。このとき、ＡＥ//ＢＣであることを証明せよ。



この課題も，いつものように結論が与えられている。数学をつくりあげる活動をするために，結論を伏せるだけでなく線分ＡＥを消してみた。

課題３－１

正三角形ＡＢＣがある。直線ＡＢ上に任意の点Ｐをとりｐｃを結ぶ。辺ＰＣを一辺とする正三角形ＰＣＤをつくる。直線ＡＢ上を点Ｐが動くとき，どんな事が言えるか。

(2) 課題３についての探究活動と教師の関わり

「この図からどんなことが言えそうですか」と発問すると，「ＰＣ＝ＣＤ＝ＰＤ」「∠ＣＰＤは60°」など正三角形の条件自体を言い換えた指摘があった。さらに調べるように求めると，測定機能を使って角や辺を測定しながら変形しはじめた。しかし，この課題ではそれだけでは意味あることが見つからない。「点Ｄは横に動いている」「直線だ」「平行じゃないか」ということに気づいた子どもが出てきた。しかし，中には本当にそうかなと考えている子どももいた。

この線がどこを通るのかを調べるために，△ＰＣＤを△ＡＢＣに重なるところまで動かしてみる子どももいた。ＧＣの作図機能を使って画面の図のＡ，Ｄを結んでみる子どももいた。線分ＡＤがＢＣに平行らしいことが分かって，その証明を考えるのにＧＣを使ってみた。

ときには合同や相似に見えたり，線分や角が等しく見えることがある。しかし，この課題では図を大きく変形することで紛らわしいことが消え，△ＤＢＣと△ＥＡＣが合同な三角形として浮かび上がってくる。「大きく図を動かしてみなさい」という助言はこの課題では効果的であった。

四点Ａ，Ｃ，Ｐ，Ｄが円周上にあることに気づいた子どもがいた。∠ＣＡＥ＝60°から正しいのだが，二年生であったので，おもしろい発見として認め，授業の終わりに紹介するに止めた。

事例４

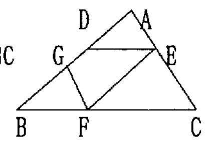
この事例で明らかにしたかったこと

① 課題に図を添えないで紙に作図させることは，生じる時間のロスに見合う効果があるか。
② この課題は期待する学習活動を引き出すか。
③ この課題，この発問でどこまで子どもから問いが出てくるだろうか。

(1) 課題

原題（中２問題集より）

右の図の△ＡＢＣにおいて、
AB=16cm，AD:DB=3:5，DE//BC
EF//AB，FG//CAである。
ＤＧの長さを求めよ。



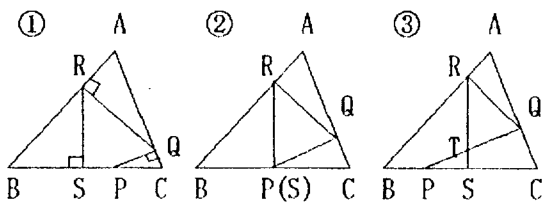
原題は未知の長さを求める数値問題である。このような問題は，図に潜んでいる関係を見つけ，手順を踏んで算出するという点で論理性が求められる。しかし，発見することはまだ限定されている。では，この問題の「各辺に並行」という条件を「各辺に垂直」に変更するとどうなるだろうと考え，次のような課題につくり変えた。

課題４

△ＡＢＣの底辺BC上に点Ｐをとる。点Ｐから辺ACに垂線を引きその交点をＱとする。Ｑから辺ＡＢに垂線ＱＲをひき，Ｒから辺ＢＣに垂線ＲＳをひく。点Ｐが辺ＢＣ上を動くとき，どんなことが言えそうか

(2) 課題３についての探究活動と教師の関わり

ＧＣを使う前に，問題の条件を把握するために紙に軽く作図させたところ，次の①，③のような図をかいた。



②の図は紙の上にかく場合には偶然にしかできない。ノートの図を見て，成り立ちそうなことを予想させてみた。「三つの直角三角形が相似になっている」「ＰＯ＋ＱＲ＋ＱＳが一定」という予想が出た。「一定」についてはもしかしたらと，多くの子どもが期待を持った。

ＧＣを使った探究が始まると，測定機能を使って辺や角の関係を調べ始めた。上記の予想が誤りであることはすぐに指摘され，「発見者」もすぐに誤りであることを認めた。∠ＲＴＱが一定みたいだということが指摘された。ここで「一定だということはどこか与えられた角と等しいところがあるはずだ」という見方が育っていると他の角の探究に向かうことにつながる。

②の図に変形していた子が「△ＰＱＲと△ＡＢＣは相似ではないか」とつぶやいた。この「つぶやき」を全員に投げかけると，測定機能を使って対応しそうな角や辺の比を求めたりして，それが正しそうだと認めた。③の図でも似たことが言えそうだという意見が出た。

①の図ではどうなるのだろうという疑問も出てきた。

③から②の図へと変形しながら，辺ＲＳと辺ＱＰを延長すれば相似になるのではないかという予想が出た。

点ＰをＢＣを離れて自由に動くようにするとどうなるかという問題に発展できるが授業ではそのような見方ができるということだけに触れるに止めた。

Ⅳ　研究のまとめ

単元構成

GCを使って図形の性質を探究していくと，１つの課題図からいくつもの性質が並行して発見される。したがって，基本的な性質を探究する段階から数学をつくり上げる活動を重視する立場に立つ授業では，学習の順序を検討し直す必要がある（資料「教材分析表」参照)。

このような検討の結果，次のような試案を作成した。

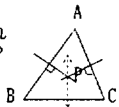
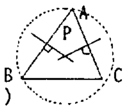
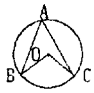
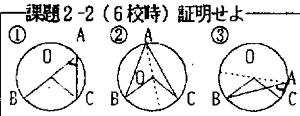
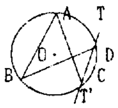
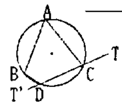
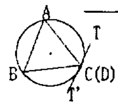
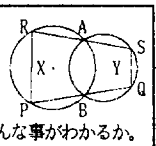
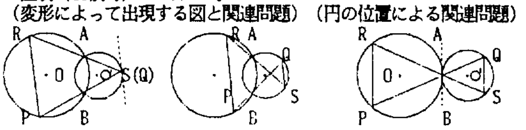
中学３年「円」

　課題・定理関係図，単元指導計画（試案）

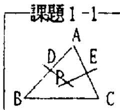
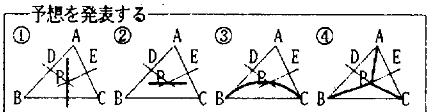
中学２年「三角形と四角形」指導計画（試案）

小学５年「三角形の面積」　指導計画（試案）

３年　第５章「円」　課題・定理関係図（試案）　<詳細は資料参照>

時数	授業課題と学習する定理　（GC授業、普通授業、定理）
導入 2 (2)	課題1-1（1校時）三角形ABC のAB，ACにそれぞれ垂直二等分線をかき、その交点をPとする。点Aを動かしたとき、交点Pはどのように動くだろうか。 ― 課題1-2（2校時）交点Pを動かさないように点Aを動かすとき、点Aはどんな線を描きますか。（点Aは、点B,C を通る円を描く） ― 定理（外接円・外心）三角形の３辺の垂直二等分線はその三角形の外心で、交わる。
2 (4)	課題1-3（3．4校時）定理（円の弦）、定理（円の接線）、定理（中心角と弧）について。作図・定理に関する練習問題
3 (7)	課題2-1（5校時）円Oの円周上に3点A,B,C をとる。AB,AC を結ぶ。中心OとOB,OC を結ぶ。点Aが円周上を動くとき、図が変形しても変わらないものは何か（∠BAC ＝ 一定、∠BAC=½∠BOC） ― 課題2-2（6校時）証明せよ ①②③ ― 定理（円周角の定理）1つの弧に対する円周角は全て等しく、その弧に対する中心角の½に等しい （7校時）定理（半円の弧の円周角）、定理（円周角と弧）について。計算・定理に関する練習問題
6 (13)	課題3-1（8校時）円Oの円周上に4点A,B,C,D をとりAB,AC,BDを結ぶ。CDを通る直線を引き、その端をT，T'とする。点Dが円周上を動く時どんな関係が成り立つか。 ― 課題3-2（9校時）・対角の和は180°　・∠ABD=∠ACT となることを証明 ― 課題3-3（10校時）・∠ABC=∠ACT となることを証明しよう。 （11校時）定理（内接する四角形）、定理（接線と弦のつくる角）について計算・定理に関する　練習問題 ― 課題3-4（12、13校時）定理（内接四角形の逆）、定理（円周角の逆）について定理に関する　練習問題
6 (19)	課題4-1（14、15校時）定理（接線の長さ）、定理（内接円・内心）について。外接三角形、外接四角形に関する練習問題。 ― 課題4-3（16校時）共通接線に関する性質 課題5（17校時）交わる2つの円X,Y があり、その交点をA,B とする。点Bを通る直線が、円Xと円Yに交わる点をP、Qとする。円Xの円周上に点Rをとり直線RAを引き円Yとの交点をSとする。PとR、QとSを結ぶ。点Rが円Xの円周上を動くとき、どんな事がわかるか。 ― 証明（18校時）PR//SQ（変形によって出現する図と関連問題）（円の位置による関連問題） （19校時）まとめ練習問題

３年　第５章「円」　単元指導計画（試案）　<詳細は資料参照>

時数	学習目標	課題と学習過程の概要	●評価の観点○予想される反応・評価と手だて
導入 2	◎着目点を絞り予想を確かめ、意図ある変形から性質の発見の仕方を身につける。 ・点Pの軌跡が直線となることに気付き、指摘できる。 ◎2辺の垂直二等分線の交点は他の辺の垂直二等分線上を動くことを理解する。 ・垂直二等分線上の点からその線分の両端までの距離が等しいことが指摘できる。 ［垂直二等分線の作図・性質］ ［角の表し方］	課題1-1  三角形ABC で辺AB,AC の垂直二等分線の交点をPとする。点Aをどのように動かすと交点Pはどのような線を描くだろうか。予想される事をかきなさい 予想を発表する ①②③④  GCで確かめる　真っ直ぐな線になりそうだ。何に真っ直ぐ？なぜ？ 交点Pは辺BCの垂直二等分線上にある事を証明しよう	●交点Pは辺BCの垂直二等分線上を動く事が発見できる。 ①中心となる性質であるが、点Aを上下に動かした時のものかを問う。 ②点Aが横に動いた時、それに伴って点Pも横に動くという予想が大半を占める。探究の意識を高める予想として大切にしたい。 ③3点を通る円の1部という考えは、以後の学習で重要である。大切にしたい。 ○真っ直ぐな線になりそうだという予想が確かめられるが、何に対して真っ直ぐなのか厳密な表現を問う。 ○発表された意見を集約し課題としてまとめる まとめ　三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる。

課題には多くの性質が含まれている。単元指導計画の試案をつくる過程で，次のようなことがわかった。

(1) 円についてまとまった学習をするのは，中学３年である。だから，基本的な性質を学習する段階からＧＣを使った探究的な学習をするのに適している。

(2) 「三角形と四角形」についての基本的な事柄については，小学校における学習から一般的な説明はできる。しかし，それがあらゆる場合について成り立つかどうかについては，本当にわかっているとは言えないような場合がある。ＧＣを使うと簡単にあらゆる場合を実現し，言葉のレベルでの説明に対応する具体的な理解ができるようになる。

そのことから，中学の「三角形と四角形」については，既習事項を論理的に整理し，それをもとに発展的な課題として探究することを計画するとよいことがわかった。「三角形・四角形」の基本的性質についてはそれを学習する小学校でＧＣを併用して探究することを検討する必要があると考える。

探究の構えと教師の関わり

１．課題を探究する最初の構えを育てる。

発見されるべきことは図の中に含まれている。しかし図を漠然とながめて変形していくだけでは，それを見つけることは難しい。図を見る一種の「構え」が必要である。探究の初期から教師の発問を通じてそのような「構え」自体を育てていく必要がある。

初めは，次のような補助発問を繰り返して，図から何を見つければよいのかについて気づかせるとよい。

① 図が変わっても変わらないものは何か。
　(いつも変わらないものは何か。)
② 図がかわっても成り立っている関係は何か。
　(いつも言えることは何か。)

初期には，さらに具体的に

③ 等しい関係にあるものは何か。
④ 和・差・比が一定になるのはないか。
　(線分，面積，角について)
⑤ 点はどのように動くだろうか。
⑥ ～はどんな角だろうか。
⑦ 辺～はどんな線分だろうか。
⑧ 合同・相似な図形はないだろうか。
⑨ 二等辺三角形・正三角形・直角三角形・平行四辺形等の特別な図形はないだろうか。
⑩ 同一円周上にある４点はないだろうか。

と発問するようにすることが大切である。

③～⑩はできるだけ早期に，探求の一種の構えとして育て，子どもが自問できるようにしたい。

２．子どもの予想される反応に対する手だて

子どもの考えている事が見えないと，いたずらにヒントを与えたり，ただ見守るしかできない。ＧＣを使って探求したり証明方法を考えているときは，どんな図をつくっているか，どこを測定しているか，どのように変形しているかが画面から見えてくる。

「予想を立てる」「予想を確かめる」「問題として仕上げる」「証明方法を発見する」の活動場面において，次のような具体的な手立てを講じた。

(1) 「性質を発見する」過程における手だて

予想の種類

① 仮定自体を別の言い方に言い換えた予想。
② 特別な図について成り立つことから推測される関係についての予想。
③ 既習の定理が成り立たないだろうかという視点から図を見て生まれてくる予想。

①は，多くの子どもがまず指摘することである。仮定となる条件を単に言い換えている。構成要素に着目させ図が変わっても変わらないものについて考えさせる。
例)「いつも変わらないものはないかな？」
　「この点は？この辺は？」

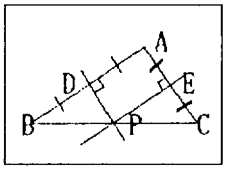
②は特別な図に場所に変形し，その図について言える関係が他の場合にも成り立たないかと考えていると思われる。良い探究をしている他の子どもの画面を転送したり，一画面に複数の図を表示して，何が考えられるかを予想させる。
例)「他にそれが言えるところはないかな？」
　「この図ではどうなる」

③は，図を変形しても常に一定になりそうな角や辺がみつかったとき「一定だということはどこかにそれと等しい角や辺があるに違いない」と考えて，既習の定理が成り立つ場面を探そうとしていると考えられる。そのまま考え続けるように支えてやるとよい。
例)「いい考えだね」
　「なぜそうなるのか説明を考えて」

そこで，これまで学習した定理の一覧を「定理ノート」としてまとめさせ，探究にいきずまったときに，視点を切り換えるために利用させると良い。

(2)　「予想を確かめる」過程における手だて

ＧＣを使うと，漠然とした予想を具体的な図として実現し，考える対象をつくりだすことができる。例えば，事例１－１のように三角形の垂直二等分線の交点の軌跡は「他の辺の中点を通るのではないか」という予想を確かめるために，左の図をつくることが効果的であった。これは，紙に作図するときにはできなかった事である。



点の軌跡を取る作業を必要とする課題では，ＴＰシートをコンピュータ画面に張りつけ，図を動かしながら条件にあった点をマークする方法をとった。ＧＣには軌跡をとる機能もあるが，ＴＰシートに直接マークする方が簡単な事が多い。ＴＰシートに角を写し取って比べたい角に重ねて調べようとすると，失敗することがある。コンピュータ画面の歪みのために，本来等しい角が，等しく見えない場合があるからである。ＴＰシートの利用がかえって誤った発見を促す結果になる事もあることに，注意したい。

〔発見に有効なＧＣの機能〕

予想を持ってＧＣを操作するには，ドット単位での変形や格子線・画面分割など，ＧＣの機能を使えるようにしておくのが良い。その中でも特に測定機能は，発見のための道具として有力である。

しかし，課題や子どもの活動の目的によって，測定の意義は異なるが，次のような２つの利用の仕方がある。

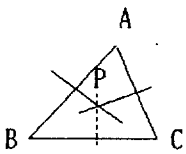
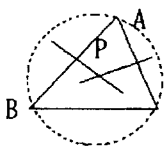
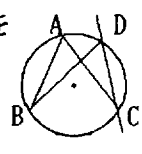
①「～を一定にしながら　～を動かす」というように変形の条件として情報を提供する。

②着目した長さ・角度・面積についての情報を提供する。

②については，画面の測定箇所を指示しておく場合と自分でどこを測定するかを決める場合とでは，探究の意欲や活動が異なる。

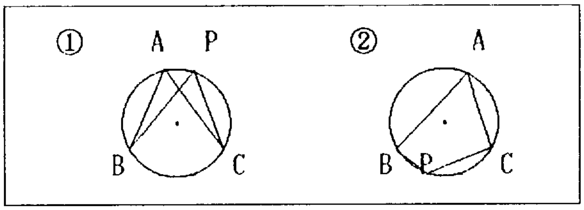
ＧＣを使うと，簡単に線をかいたり・消したり・注目する線に色をつけることができ発見の強力な道具になる。ＧＣで作図しなくとも図に直線や円を追加してみることだけは，経験させた方がよい。

ＧＣを使った探究のステップ

形　態	指　導　内　容	留意点とＧＣの機能
パソコン １台 一斉授業	・ＧＣを使って考える方法を知る。 例）△ABC があります。辺AB、辺AC の垂直二等分線の交点をＰとします。△ABC の頂点Aを動かし図を変形するとき、交点Ｐはどんな動きをするでしょうか。  	○子どもとの対話形式で主に教師が操作する。 ・着目する視点をしぼり、予想と比較させる。何を探究するのか目的を明らかにする。 ・どこが変わり、どこが変わらないか。何を発表すれば良いか。 ［　図の読込、変形　］
パソコン ２人１台 ﾊﾟｿｺﾝ教室 個人・ｸﾞﾙｰﾌﾟ	・ＧＣを使って意図する変形の仕方を知る。 例）△ABC があります。辺AB、辺AC の垂直二等分線の交点をＰとします。交点Ｐを動かさないように、点Aを動かすことは、できるだろうか。  	○グループやペアーで話し合いながら操作する。 ・図の微妙な動かし方や大胆な動かし方を経験させる。 ・仮説を問題として仕上げていく過程を経験する。 ・いつも変わらない関係がないか ［図の読込、変形、格子線、］
パソコン ２人１台 ﾊﾟｿｺﾝ教室 個人・一斉	・ＧＣの機能を使い方を知る 例）円周上に３点A,B,C をとりAB,AC を線分で結ぶ。円周上に点Ｄをとり ADを線分で結ぶ。点C，Ｄを通る直線を引く。このとき図からどのような事がわかるか。  	○２人（１人）で話し合うながら操作する。 ・探究に必要な機能を習得する ・仮説を立て証明の糸口を発見 ・補助線を引いたり測定機能を用いたりして探究する ［　図の読込、変形、格子線 画面分割、作図、測定　］

(3) 探求過程における議論

同じ課題を見ていても，子どもによって考えていることはさまざまである。自由に図を変形しているときには図自体も子どもによって異なっていることがある。図が異なると，そこに成り立つ事柄も異なることが多い。例



えば事例２のように，上の図①について考えている子が∠ＢＡＣ＝∠ＢＰＣが成り立つのではないかという予想を発表すれば，②の図について考えていた子からそれはいつも成り立つとはいえないという批評が期待できる。（授業ではそうだった）この二つの予想を巡って議論することで，問題がさらに明確になる。議論を通じて，それらが成り立つ条件が異なることが明らかになり，どんな場合にどういうことが成り立つのかがはっきりする。

議論はまた，論理的な説明を必要とする。証明への動機づけとしても意義が大きい。どこで議論が生まれそうかを予想し，議論の機会を積極的に授業に配置していくようにしたい。

(4) 「証明方法を発見する」過程での証明の意義

子どもが見つけた事実を証明しようという意欲が沸くのは，次のようなときである。
①どうもそうらしいが見つけた法則は本当なのだろうか
②多くの例から言えそうだが，いつも言えるのだろうか
③見つけたことについては確信があるが，なぜそうなるのか理論的に納得したい。

①は本当に正しいかどうかわからないという不安を，証明によって解消しようとするものである。測定機能を使うと，その結果を信じてしまう子どもが多いのは問題である。

複雑な図では色々な図が重なりあって，注目すべき図形が見えてこないことがある。こんなとき，次の方法が効果的である。

① 図を大きく変形することで，注目すべき図形を浮かび上がらせる。
② 図が簡単になる場合（特別な場合）をつくって，そこで見つけた証明方法が，他の場合にも利用できないかを考える。
③ 漠然とした予想について，検討対象になる具体的な図として実現してみる。

[ＧＣを利用した授業の概要]

分	授業の流れ	ねらい
5	[問題場面の設定] ・口頭、ワークシート [予想] ・どんな事が言えるだろうか	・条件に応じた図をかき、問題場面を把握する。 (基本的には文章。条件の箇条書きも可) ・図の構成要素に着目させるが、直観も大切にする。
5	[議論] ・本当にそうだろうか ・他にないだろうか	・自分の予想との違いから、探究する意欲を深める。 ・他の意見を聞くことで、探究の視点を広げる。
20	[ＧＣで探してみよう] ・性質の発見 ・発見のための工夫 [議論] ・他画面を転送しそれについて話し合う（焦点化） ・問題として仕上げる	・多くの子どもがかくと予想される図を読み込み、変形する。 ・情報をどう読み取り発見につなげていくかを知る。 （ＧＣでの探究は１０～１５分程度が目安。その間指導者は全体への発問は控え、個別指導する。） ・中心課題となる関係を確かめ、問題として仕上げる。 (子機をロックし画面を違う環境にして、議論に集中させる)
10	[証明の発見] ・仮定、結論を確認 ・ＧＣ、紙を利用し話し合う [証明の発表] ・子どもは口頭で発表、教師が証明として仕上げる	・証明のための小問を見つける。 ・簡潔で論理的な証明ができるようにする。 ・他の場合でも同じように証明できるかどうかを検討させる。
5	[まとめ]	

V．今後の課題

1．課題を開発し，それをもとにどんな探究活動が生まれてくるかを分析する。

作図ツールを使って図形の性質を探究していくにはそれにふさわしい課題が必要である。図形の基本的な性質を探究していく場合は，シンプルな図形で，しかもそこから複数の事柄が見つかるという課題が適している。このような課題を開発するためには，ＧＣを使って教科書等で見慣れた図形をさらに分析していく必要がある。

小学校では，紙を折る，切る，重ねる，並べるというような具体的な道具を使って考えることが重要である。三角形や四角形の基本的な性質の探究学習は，小学校での計画を考えていく必要がある。そのためには，具体操作とコンピュータによる探究とを効果的に組み合わせた探究活動を新たに計画していく必要がある。

このことから，次のような課題が考えられる。

(1) 図形の基本的な性質を探究していくのにふさわしい複数の事柄が発見されるシンプルな課題をつくる。
(2) 具体操作とコンピュータを効果的に組み合わせた小学生のための学習計画と適切な課題を開発する。
(3) それぞれの課題について，その課題からどんな探究活動がうまれてくるかを分析する。

2．コンピュータを使って探究する力を育てる指導過程を更に具体化していく。

合同や相似な図形はないかとか，等しい辺や角はないかというような，図を見たときの一種の「構え」は，教師と子どもが対話しながら探究することを通じて育てられる。このときにどんな発問をすべきか，その対話を子どもに内言化していくにはどのような過程をたどるのがよいのかを更に探っていく必要がある。

もしこの点をこの位置に動かしても見つけた性質は成り立つだろうか，それとも何か別の性質に変わるのだろうかとか，もしこの条件を変更したら結論はどう変わるかというようなことを自分で問い，予想を立て，確かめていくようにすることが重要である。このような問いに子どもが自分で気づき，自分でその解答を探っていくようにするには，どのような指導過程をたどる必要があるのかを更に事例研究する必要がある。

本研究ではどちらかというと，コンピュータで多くのデータを集めて帰納的に予想を立てるという探究活動が多かったように思われる。

しかし，課題について特別な場合に当たる図をもとに立てた予想が他の場合にも成り立たないだろうかとか，角が一定だということは何処かに等しいところがあるはずだというような推論も必要である。作図ツールはこのときの「漠然とした予想」に対応する図を実現することができる。探究の対象になる図が実現できれば，紙の上ではできなかったような探究活動も可能になる。どのような場合にそれができるのかについて，今後更に事例研究を深める必要がある。

このことから，次のような課題が考えられる。

(1) 課題について最初に調べてみるべきことを「探究の構え」として習慣化する。
(2) 自問自答する力を育てる。
(3) コンピュータが提供する豊富なデータから帰納するだけでなく，推論によって探究していく力を育てる。

3．充実した探究活動ができるようにするためのコミュニケーションについて探っていく。

コンピュータの画面は子どもの探究過程の表現でもある。画面に表示されていることから，その子が図のどこに注目し，どんな予想を立て，それを確かめるために何をしようとしているのかが，かなり見えてくる。それを教師がどう解釈し，どんな援助をするのがよいのかを更に事例研究していく必要がある。

自問自答することが大切だが，それだけでは充実した探究ができるわけではない。自分では成り立つと思っていたことが，変形の仕方によっては別の性質に変わることがある。そのことを知ることは一種の「つまずき」を感じることでもある。そこから議論が生まれてくる。どんな課題についてどんな発見があり，そこからどんな議論が生まれ，どんな疑問に気づかせたいかを課題に即して更に分析して行く必要がある。

このことから，次のような課題が考えられる。

(1) 子どもと教師のコミュニケーションを充実する。
(2) 子ども間のコミュニケーションを充実する。
(3) 自問自答する内部対話を育てる。

4．探究を深めるためには，子どもがＧＣのどの機能を使えるようにしておくのがよいかを明らかにする。

測定，図の追加・削除，軌跡，画面分割，格子，ハードコピー等の機能は習得のためにさほど時間を必要としない。しかも有力な探究方法である。本研究では，これらを充分に生かして探究してきたとは言えない。

5．証明方法を発見するために，ＧＣを活用する方法を課題に即して探る。

6．円単元の指導計画の試案の妥当性を検証する。

・参考論文，文献

〔愛知教育大学　飯島康之助教授　論文〕

「コンピュータにおける図形の動的な扱いについて」
（筑波数学教育研究 第1．9号 1990）

「コンピュータによる動的な図形教材の開発の支援について」
（愛教大数学研究会誌 イプシロン 第32号 1990.3）

「作図の構成的な側面とコンピュータによる支援について(その2)」
（愛教大数学研究会誌 イプシロン 第33号 1991.3）

「図形の動的な扱いのコンピュータ上での実現とその利用について」
（愛教大研究報告 第15号 1991.3）

「作図ツールを用いた問題解決における問題の変容と問題生成の一方略について」
（愛教大数学研究会誌 イプシロン 第34号 1992.3）

「数学的探究のための環境としての作図ツール」
―事実の収集可能性と数学的知識の実行可能性の観点からの考察―
（第25回数学教育論文発表会1992岡山大会）

「作図ツールの導入に伴う学習活動の変化」
―中学校の数学の教科書の問題の分析による考察―
（愛教大数学研究会誌 イプシロン 第35号 1993.3）

「作図ツールを用いた数学的探究のための教材開発」
（第26回数学教育論文発表会1993上越大会）

〔関連論文〕

「数学教育におけるコンピュータの機能」
―ジオブロックによる三角形の外心の探索―
（学芸大数学教育研究 佐々木棟明 第3号 1991）

「数学の問題の発展的な扱いによる指導についての研究」
（横浜国立大学　橋本　吉彦・坂井　裕）

中学校　問題解決と課題学習　その1
「問題解決学習のあり方について」
（日数教・神奈川大会　吉沢　明雄　1992.8.6）

「思考の道具－教育」のミッシング・リンク状況的認知論
（「現代思想」論文集　美馬のゆり　1991.6）

コンピュータ教材における画像表示の略図性に関する研究
「思考と道具の相互作用に関する研究」
（文部省科研費研究C　研究成果報告書　1992.3
東京大学　佐伯　胖・美馬のゆり）

「コンピュータによる思考を支援する道具的環境」
（教育工学関連学協会連合　第3回全国大会1992.11
東京大学　佐伯　胖・美馬のゆり）

・Per. R. D(1987) Cognivie Techonologies for Mathematics Education. in Alen H.Schoenfeld (Eds) ; cognivite Science and Mathematics Education. pp. 89－122 LEA

昭和55，56年度川崎市教育委員会委嘱研究
「多様な学習活動を組み入れたユニット式学習とアドバイスブックの利用」　（川崎市立高津中学校）

川崎市教育研究所　研究紀要
「数学的思考力を高めるための図形指導方の研究」
「図形学習のつまづき」
（川崎市総合教育センター 男沢　公夫 1962-1966）

〔文　献〕

「算数数学科オープン･アプローチによる指導法の研究」
能田　伸彦　東洋館出版

「算数数学科　オープンエンドアプローチ」
島田　茂　みずうみ書房

「問題から問題へ」
―問題の発展的な扱いによる算数数学科の授業改善―
沢田　利夫・竹内　芳男　東洋館出版

「問題を発展的に扱う数学科の指導」　青山　庸
―数学の授業改善をめざして―　東洋館出版

数学的な考え方・態度とその指導
第1巻「数学的な考え方の具体化」　片桐重男
第2巻「問題解決過程と発問分析」　明治図書

「新版幾何学つれづれ草」　秋山武太郎　サイエンス社

「図形の性質の研究」　乾　東一　啓林館

「メディアを活用する数学科課題学習」
磯田・大久保・飯島　明治図書

「数学教育’93」―コンピュータで授業を変えよう―
飯島・玉置・地曳　明治図書

・指導助言者

愛知教育大学助教授	飯島　康之
文教大学教授（当センター専門員）	片桐　重男
横浜国立大学教授	橋本　吉彦
群馬大学教授	小関　熙純
川崎市中学校数学科研究部会長	奥山　良平
川崎市中学校数学科前研究部会長	加藤　国重
川崎市小学校算数科研究部会長	新海　清司
川崎市小学校算数科前研究部会長	三力谷達也
川崎市教育委員会　指導主事	菊池　俊光

・研究協力者

川崎市立白山中学校　教諭	地曳　善敬
川崎市立井田中学校　教諭	吉沢　明雄
川崎市立川崎中学校　教諭	山下　国広
川崎市立日吉中学校　教諭	金田　昌之
川崎市立川崎高校　教諭	市野　典明

川崎市中学校　数学科研究会　図形チーム
川崎市小学校　算数共同研究会