

自分の考えを表現することを大切にした算数・数学科の授業改善

算数・数学科研究会議

田中 仁浩¹

古巻 智子²

岩田 尚之³

津田 智美⁴

要 約

今、算数・数学の学習において、「解ける」と「わかる」が分離してしまっていないだろうか。算数・数学の学習は、与えられた課題の答えをただ求めるというだけではなく、子どもが問題を解決する力を高め、同時に算数・数学の面白さを感じられるようなものでなくてはならない。

本研究会議では授業を「子どもの表現」という視点でとらえ直し、授業改善につなげたいと考えた。表現することによって子どもたちは、これまでみていなかった算数・数学の内容や方法を見いだしたり、これまでに意識しなかった、算数・数学にかかわろうとする自分自身や友達、教師の一面を見付けたりする。また、そうなることによって学習に実感が生まれ、算数・数学の面白さやよさ、美しさの感得へとつながっていくと考えたのである。

そのために、問題解決における表現の働き、一人一人の表現を引き出す手だて、表現を関連付けたり価値付けたりすることの意義、表現することが教師を含む周りの者にとっても子ども自身にとっても評価のもととなることなどを、明らかにしようと試みた。

キーワード：算数・数学，授業改善，表現すること，評価，わかる

目 次

主題設定の理由	54	1. 研究の仮説	59
1. 研究のねらい	54	2. 研究の方法	59
(1)算数・数学科の現状	54	3. 研究の内容	60
(2)子どもの実態についての話し合いから		(1)問題解決における表現の働き	60
.....	54	(2)表現することを大切にするための手だて	
(3)「考え判断すること」と		61
「表現すること」	55	(3)表現の高まりについての評価	62
(4)「解けること」と「わかること」	56	(4)検証授業	62
2. 研究主題についての考え方	57	研究のまとめ	67
(1)「自分の考え」とは	57	1. 研究を通してみてきたこと	67
(2)「表現する」とは	57	2. 今後に向けて	67
(3)「授業改善」のポイント	58	参考文献	68
研究の内容	59	指導助言者	68

¹ 川崎市立王禅寺小学校教諭（長期研修員）

² 川崎市立宮内中学校教諭（研修員）

³ 川崎市立稲田中学校教諭（研修員）

⁴ 川崎市立西御幸小学校教諭（研修員）

主題設定の理由

1. 研究のねらい

(1) 算数・数学科の現状

教育課程審議会の答申(1998年7月)では、「自ら学び、自ら考える力」の育成に関して、「知的好奇心・探究心をもって、自ら学ぶ意欲や主体的に学ぶ力を身に付けるとともに、試行錯誤をしながら、自らの力で論理的に考え判断する力、自分の考えや思いを的確に表現する力、問題を発見し解決する能力を育成し、創造性の基礎を培い、社会の変化に主体的に対応し行動できるようにすることを重視した教育活動を積極的に展開する」ことを強く求めている¹⁾。

表1 我が国の子どもの意識

ところが、1999年に中学校2年生の生徒を対象として実施された国際教育到達度評価学会(IEA)の第3回国際数学・理科教育調査の第2段階調査(TIMSS-R)の報告書によると、わが国では4年前の同調査に比べ、得点や正答率は依然として高いものの、数学が大好きあるいは好きと答えた生徒の割合は5ポイント減って国際的にみて最も少ない方に属している²⁾³⁾。

学年	大好き	好き	嫌い・大嫌い
'99 中2	9%	39%	52%
'95 中2	10%	43%	47%
'95 小4	24%	47%	29%

また、根本博(文部科学省初等中等教育局視学官)は、解き方を知らせ、覚えさせ、使えるようにするという指導ではなく、解く意義がわかり、解く過程において創造や発見、感動があり、子どもが数学の真の面白さを味わうことのできる学習が今、求められているとし、今回の学習指導要領改訂に関連して、数学の学習は「どうすればいいの」から、「なぜそうしていいの」へと転換を図ることが大切であると述べている⁴⁾。

さらに、2001年にベネッセ教育研究所が全国3地域で小学校5年生と中学校2年生、高校2年生の児童生徒を対象に行った第3回学習基本調査によれば、小学校5年生の「がんばって勉強したい教科」は算数が断然多く、しかも学力の低い子どもの方が高い子どもよりもその割合が高いことが示されている⁵⁾。また、中学校2年生の「がんばって勉強したい教科」にも数学が英語に次いで2番目に挙げられており、やはり学力の低い子どもの方が高い子どもよりもその割合が高い⁶⁾。このことは私たちに、「関心・意欲・態度」が低いという評価を子どものせいにするのではなく、「わかりたい」「解決したい」という子どもの気持ちに応えられるよう、これまで以上に努力していかなければならないということを伝えているといえよう。

(2) 子どもの実態についての話し合いから

研究の立ち上げに当たり、日ごろの学習指導において問題点と感じていることを会議のメンバーで話し合った結果、次のことが挙げられた。

答えを出すこと(解くこと)にこだわっている。

- ・ 解くことよりも得点する(いい成績をとる)ことに楽しみを覚えている。

1) 教育課程審議会(http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/12/kyouiku/toushin/980703.htm)

2) 国立教育政策研究所編『数学教育・理科教育の国際比較(第3回国際数学・理科教育調査の第2段階調査報告書)』

ぎょうせい, 2001年 p.p.55-56

3) 『小・中学生の算数・数学, 理科の成績(第3回国際数学・理科教育調査国内中間報告書)』国立教育研究所, 1996年 p.84

4) 川崎市立中学校教育研究会数学部会総会(2002.4.22)における講演より

5) ベネッセ教育研究所『第3回学習基本調査報告書 小学生版』ベネッセコーポレーション, 2001年 p.p.20-23, p.115

6) ベネッセ教育研究所『第3回学習基本調査報告書 中学生版』ベネッセコーポレーション, 2001年 p.p.22-23, p.115

- ・ 答えさえ出ればよいと、他の見方・考え方には関心をもたない子が少なくない。
- ・ 最終的に答えが出ないとそれまでの活動はすべて無駄であったかのようにとらえてしまっている子がいる。
実感や感動が薄い。
- ・ 実物があると豊かに考えたり表現したりするが、ないと特定の方法からあまり抜け出そうとしない。
- ・ 教師が「当たり前」と思っていることに、子どもは案外、数学的に価値のある興味を示したり、意外な考え方や表現をしたりしていることがある。
- ・ 子どもたちはあまり「みえないものをみえるようにしよう」としないし、教師もそうさせる手だてを十分にとっていない。
- ・ 「もっと調べてみたい」という気持ちが、発展的な学習、生涯学習の素であると思われるが、それを十分に引き出したり育てたりしていない。
「答えを出すことができる（解ける）」＝「理解している（わかっている）」ではない。
- ・ 解けるけれどもわかっていないという子が多い（形式的処理に陥っている）。
- ・ わかっているのに最後まで解けない子がいる（うまく言い表したり書き表したりできないという理由からあきらめたり嫌いになったりしている）
何をもって「算数・数学ができる」と判断してよいのか子どもは迷っている。
- ・ 少人数指導体制や発展的・補充的な学習に向けても、自己評価の力を付ける必要がある。

このような子どもの実態を生み出したのには、指導する側に改善すべき点があるのではないだろうか。確かに、中学校においては、高校受験を控えており、子どもからも親からも「点の取れる数学学習」が求められている。また、小学校でも得点アップは切実な問題である。「子どもが実感や感動をもって『わかった』と思える授業にはしたいけれども、時間の制約や進度をそろえることを考えると、どうしても技能が先行してしまわざるを得ない。」など、ほとんどの教師がジレンマを感じている。しかし、これまで通りにしていたのでは、何も変わらないのである。

（３）「考え判断すること」と「表現すること」

「学習指導要領改訂の要点」では、「数学の学習は単に問題を解いて答えを求めるということだけではなく、自ら調べ判断する力や、粘り強く考え続け考えたことを相手に分かるように説明したり表現したりする論理的な思考力や表現力も大切にすることが必要」と述べられている⁷⁾。

ところで、教育課程審議会答申(1998年7月29日)の教育課程の基準の改善のねらいの中に、「試行錯誤をしながら、自らの力で論理的に考え判断する力、自分の考えや思いを的確に表現する力、問題を発見し解決する能力を育成し、…」とあるが、これを同中間まとめ(1997年11月)の「論理的な思考力、判断力、表現力、問題を発見し解決する能力を育成し、…」と比較してみると、「論理的な思考力、判断力」が「論理的に考え判断する力」、「表現力」が「表現する力」と改められ、それぞれに「試行錯誤をしながら、自らの力で」、「自分の考えや思いを的確に」という言葉が書き加えられている⁸⁾。すなわち、これまで以上に、粘り強く考え続けることや、考えたことを相手にわかるように説明したり表現したりすることを大切にされた授業が求められている訳である。

「絵に描いてみたら考える道筋がひらめいた」とか「言葉に表してみたら間違いに気付いた」とか

⁷⁾ 文部省『学習指導要領解説 数学編』大阪書籍、1999年 p.5

⁸⁾ 教育課程審議会 (http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/12/kyouiku/toushin/971107.htm)

いうように、これまでみえていなかった算数・数学の内容や方法がみえてくることもある。また、表現することによって、それまで意識していなかった「算数・数学にかかわろうとする自分」を発見することもある。さらには、表現することによって、これまで知らなかった友達や教師の「意外な面」を見付けることもある。これらによって、学習に実感や感動が生まれ、それが算数・数学の面白さやよさ、美しさの感得へとつながっていくと考える。

(4)「解けること」と「わかること」

本来、「解けるようになる」ことと「わかるようになる」こととは一体となっているはずであった。すなわち、解けるようになったことによってわかるようになるのであり、わかるようになったからこそ解けるようになるのである。そこで

表2 解けるようになることとわかるようになること

「解けるようになる」	「わかるようになる」
Knowing How に属する知識	Knowing That に属する知識
形式的にでき、方法は理解している（行為による目標の達成が志向されている）	方法に付随した内容も理解している（「わかっている」という心的状態、性向が志向されている）
「効率的に」「うまく」「見事に」といったような、外から観察される特徴づけで言い表せる	原則的に、本人にしかわからない

本研究会議では、佐伯胖の考え⁹⁾をもとに、「解けるようになること」と「わかるようになること」を表2のようにまとめ、研究を進めようと考えた。さらに、清水静海の「これに Knowing Why を加えて考えるべき」との助言¹⁰⁾を受け、本研究においては、「なぜ」を追究することによって、「解ける」と「わかる」の一体化を図ろうと考えた。

さて、ここで改めて日ごろの授業を振り返り、「わかる」ことを大切にしているだろうか、「わかろうとすること」を大事にしているだろうか、「なぜ」を追究しながら子どもの発言をとらえているかと、自問自答してみる。すると、次のような反省点が浮かび上がってくる。

- <例> 自力解決の時間に、ノートに何もかけないでいる子がいると、一方的にヒントを与え、それでも進まないでいると「どうしたの！さっき言ったやり方でやってみた？」と詰問する。
- <例> 既に一通りの解決を済ませた子に、「よく考えたね。でも、もっと良い方法はないかな。」と、結果的にはその子のやり方を初めから否定しているにとらえられても仕方のない支援の仕方をする。
- <例> 集団での練り上げの過程において、教師の都合のよいように発表の順序等を整理し、表面には出していないと言いながらも、発表内容や発表の仕方に序列を付けている。
- <例> まとめの段階で、苦手意識をもった子にもやる気をもたせるということを口実に、「要はこれだけ覚えておけば大丈夫！」と、結論をクローズアップした押さえをする。

これらのことが、答えを出すことにこだわる、感動や実感が薄い、「解ける」と「わかる」とが分離した、自己評価する力の弱い、そのような子どもたちの実態を生み出しているのではないだろうか。「子ども一人一人を大切にする」、「子どもの主体性を伸ばす」と言いながら、実は、考えるために必要な時間はもちろん、自分の考えを発表するか否か、また、発表するならどういう順にするか、さらには誰の発表を聞くか、どのようなまとめをするかなど、学習方法の大半を教師が決めてしまい、自分の思いをほとんど反映できない状態に子どもを追い込んでいる。しかもそれらの制約を課すことが知らず知らずのうちに多くなり、当たり前になっている。このままでは、「表現することも「表現されたものをよみ取ろうとする」ことも、ひいては「わかろうとする」こともしない

9) 佐伯胖『わかり方の根源』小学館、1984年 p.12-13

10) 平成14年度国内研修(2002.6.20 筑波大学)における指導助言より

ようとする」子どもが、ますます増えてしまうのではないかと考える。

表現し振り返ることによって、自分自身の考えを明確にすることができるのではないか。他に伝えようとすることは、自分の考えを整理したり高めたりすることに有効に働き、さらに、他が表現したものをよみ取ることによって、理解を深めることができるのではないか。これらの働きは、子ども同士だけでなく、子ども対教師にとっても同じであろう。指導と評価の一体化が一段と叫ばれている今、表現なくして子どもの評価、子どもへの指導はできない。すなわち、互いに考えを表現し合うことは、学習集団の質を高めると考える。

時数以上に内容が厳選され、「ゆとり」が生まれた今こそ、私たちは子どもが何を表現しているか、何を表現しようとしているかをしっかりと見取り、子どもが表現することに価値を見だし、もっと表現しようとするようにしていくことが大切であろう。

以上のようなことから本研究会議では、「授業を子どもの考えの表現という視点からとらえ直す」ということをねらって、研究主題を次のように設定した。

自分の考えを表現することを大切にした算数・数学科の授業改善

2. 研究主題についての考え方

(1)「自分の考え」とは

表現する「考え」をもつことは、決して簡単なことではない。算数・数学では、論理的な思考力を育てることを大きなねらいとしているが、すべての子どもが常に「論理的」といえる考え方や見方ができる訳ではない。しかし、初めは的外れであったり不十分であったりしたとしても、子どもたちは自分の考えを見直し、再構築する過程を通して、数学的な見方や考え方、数学的な態度を培っていく。すなわち、一律に同じ考え方をさせようとする指導よりも、一人一人が考えをより数学的に高めていかれるようにする指導を心掛けるべきである。

そこで、本研究会議では、「わかりたい」「解きたい」という気持ちの下に生まれた「考え」は、問題の解決に向かって有効に働く（数学的に価値をもっている）ものであるととらえ、的外れであったり不十分であったりする考えも含めて、「自分の考え」として大切にしていこうとする。

(2)「表現する」とは

本研究会議では、算数・数学の学習における「表現」を「問題解決を支えるもの」としてとらえ、表現する目的を次のようにとらえた。

自分の考えを明確にする（もやもやしたものをはっきりさせる）ために表現すること
自分の考えを整理したり高めたりする（考えを発信(表現)する）ために表現すること
学習を振り返り、理解を深める（自分や他の人の考えをよみ取る）ために表現すること
新たな問題を発見する（自分や他の人の考えを発展させる）ために表現すること

ここでは、学習の初めに、教師または子どもたちによって用意された、共通に解く「問題」は「課題」、課題や問題を解決していく過程において生じる「問題」は「問題」としている。したがって、上の～は、個の「問題」を解決するのに有効に働く「表現」である。

例えば、本市の算数教育研究会では、問題解決学習を「問題把握」「自力思考」「集団思考」「まとめ」

の4段階に分けてとらえている¹¹⁾が、この流れは私たちの言う4つの「表現する目的」と密接にかかわっている。両者の関連は、概ね次のようになる。

各自が自分自身の問題を把握する段階（問題把握）

課題の場面を明確にしたり、課題を解くために使えそうな既習を思い起こしたり、結果や方法に見通しをもったりする際には、「自分の考えを明確にするための表現」が大きく働く。同時に、友達や教師そして自分とのやりとりの中で も働く。

計画をもち自分の力で考える段階（自力思考）

で得た見通しを基に、自力で解決していく段階になると、「自分の考えを明確にするための表現」の働きに加え、考えたことを整理したり他に伝える準備をしたりするために「自分の考えを整理したり高めたりするための表現」も大きく働くようになる。その過程においては当然、自分の考えを振り返る中で や も働く。

皆の考えを集団で練り上げる段階（集団思考）

互いの考えを交換し合い、高め合う段階においては、～ のすべてが随時働くことになるが、主に自分の考えを発表するときには「自分の考えを明確にするための表現」や「自分の考えを整理したり高めたりするための表現」が、友達の考えを聞くときには「理解を深めるための表現」と「新たな問題を発見するための表現」が、それぞれ大きく働く。

まとめの段階（まとめ）

学習の振り返りでは、主に「理解を深めるための表現」と「新たな問題を発見するための表現」が働くが、自他の考えを比べたりまとめたりする過程においては や も機能する。

つまり、問題解決の流れの中で～は、軽重の具合を変化させながら継続的に機能しているというところである。すなわち、本研究会議においては、「表現（他者(友達や教師)そして自分自身と対話すること）は問題解決の全過程において意義がある」ととらえている。

（3）「授業改善」のポイント

常に以下の3点を意識した授業を継続して展開する。

一人一人の子どもが自分の考えを表現する場を保障する。

表現したものを表現者自身、教師、友達すべてが大切にできる環境を整える。

子どもの一つ一つの表現から数学的な価値を見いだす。

これらは、ただ毎時間「表現しなさい」、「大切にしなさい」と言っても実現しない。一つ一つの表現がどのように扱われるか、これが大変重要な授業改善のポイントとなる。

例えば、次のような課題について考えてみる。

14 このボールを3人で同じ数ずつ分けると、1人分は何こになるでしょうか。また、ボールは何こあまるでしょうか。 【小学算数3上「あまりのあるわり算」教育出版より】

この課題に対して、「もう1個あったらいいのになあ」ということを言った子がいたとしよう。この課題で求められている「答え」は、「1人分は4個で2個余る」である。なぜなら、これは「あまりのあるわり算」の課題であり、「不足のあるわり算」の課題ではない。そこで、「ここでは『何こあまるでしょうか』と聞かれているのだから、余りを考えましょう。」と指導する。それがここでの「ねらい」だからである。

しかし、「もう1個あったらいいのになあ」と言った子は、明らかに場面を的確にとらえている。14

¹¹⁾ 川崎市立小学校算数教育研究会『学習展開と発問』川崎市立小学校算数教育研究会，1993年

個のボールを3人で等分しようとしている。そして「どうすればうまく分けられるか」という自分にとっての「問題」を把握し、解決に向けた見通しをもっている。おそらくこの子は「1人分を5個にするには1個足りない」という「答え」を出すことができるであろう。つまり、数学的な価値を十分にもった考え方をしているのである。

ならば、この課題が「14このボールを3人で同じ数ずつ分けようと思います。うまく分けられるでしょうか。」であったならばどうであろうか。すると、「1人分は4個で2個余る」も「1人分を5個にするには1個足りない」も「答え」になる。子どもからは「1人分は3個で5個余る」や「1人分は2個で8個余る」も出てくるかもしれない。これらはすべてが「答え」であり、「剰余類」や「一次関数」などにもつながる、数学的に価値のある見方である。

はじめから「1人分は4個で2個余る」だけを「答え」として求めるのではなく、多様な見方をした上で、「ぴったり分けきれない場合には、不足なくできるだけ多く分け、分けきれなかったものを余りとして表す」ということを約束する。その方が、「あまりのあるわり算」の意味の理解が深まり、数に対する感覚も豊かになるのではないだろうか。

多様な見方ができる課題は多様な表現を生み、その表現が数学的な見方をさらに豊かにする。私たちは、「なぜ教えるのか」「何を教えるのか」を基に、子どもの表現の裏側にある数学的な価値を見抜いたり、思考や表現の幅を広げられる課題を準備したりすることのできる教師でありたい。

剰余類
 整数の集合を、正の整数 n で割った余り $0, 1, 2, \dots, n-1$ で類別したとき、各類を剰余類という。¹²⁾

割る数を3 ($n=3$)としたときの剰余類
 $A_0 = \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$
 $A_1 = \{\dots, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$
 $A_2 = \{\dots, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$
 (上の例の余りは、 A_2 にあたり、式で表すと $3k+2$ (k : 整数) のように表せる。)

上の解答例の確かめ

1人分	過不足	確かめ(検算)
5個	1個足りない	$5 \times 3 - 1 = 14$
4個	2個余る	$4 \times 3 + 2 = 14$
3個	5個余る	$3 \times 3 + 5 = 14$
2個	8個余る	$2 \times 3 + 8 = 14$

研究の内容

1. 研究の仮説

これまで「主題設定の理由」で述べてきたことから、本研究の仮説を次のように設定した。

自分の考えを表現したり、自分や他の人が表現したものをよみ取ったりすることを大切にしていけば、問題を解決する力が高まり、同時に算数・数学の面白さやよさがさらに感じられるようになる。

2. 研究の方法

研究に当たっては、まず子どもの算数・数学に対する意識を明らかにしようと考えた。そこで、国立教育政策研究所が行った調査の問題¹³⁾¹⁴⁾を参考にして、研修員が指導している児童生徒を対象とした、「算数・数学に対する意識調査」を7月に実施した。結果は次のようなものであった。

- ・得意な教科に算数・数学を挙げている子の割合に比べ、好きな教科に算数・数学を挙げている子の割合が少ない。
- ・8割弱が算数・数学は生活の中で誰にでも大切だと思っている。
- ・8割強が算数・数学はやさしくない教科だと思っており、その傾向は学年が上がるにつれて高まる。
- ・意識に関して、上記の内容以外にも国立教育政策所のわが国の児童生徒への評価と概ね同様の結果が得られた。

¹²⁾ 日本数学教育学会編著『算数教育指導用語辞典』教育出版、1998年 p.174

¹³⁾ 国立教育研究所『小・中学生の算数・数学、理科の成績』(前出) p.p.272-284

¹⁴⁾ 国立教育研究所内 理数定点調査プロジェクト『理数調査報告書』同プロジェクト 2000年 p.p.56-63

これを踏まえ、次の方法で研究を進めていった。

(1) 問題解決における表現の働きを明らかにする。

先行研究や小・中学校における授業実践から、問題解決の過程において表現がどのようなはたらくものであるかを明らかにするとともに、改めてその意義を探る。

(2) 表現することを大切にするための手だてを探る。

自分の考えを表現することを促したり、表現を数学的に高めたりするための手だてを探る。

(3) 表現する力の評価の仕方を探る。

具体的な手だてが表現する力を育成するのに有効に働くものであるか検証する際の、評価の観点、方法などを明らかにする。

(4) 授業を通して仮説を検証する。

具体的な手だてが表現する力を育成するのに有効に働いているかを検証する。

3. 研究の内容

(1) 問題解決における表現の働き

どのようなことを表現するのか。

- ・自分にとっての問題
- ・自分の問題についての考え
- ・問題を解決する過程
- ・他者の考えや解決の過程
- ・新たな発見や自分の取組に対する振り返り
- ・学習活動における感想など情意的なもの

何を使って表現するのか。

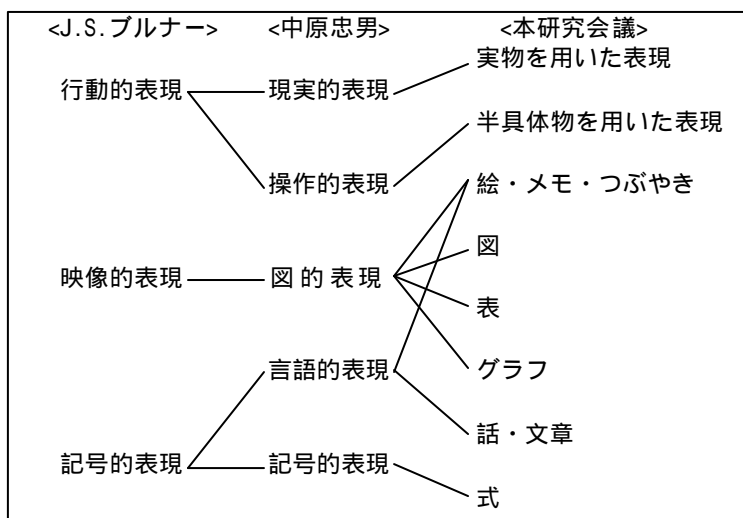
中原忠男は J. S. ブルナーの E I S 原理を基に、数学教育における表現様式を大きく右の 5 つに分類している¹⁵⁾。

E1. 現実的表現：実世界の状況や実物、具体物による表現
E2. 操作的表現：具体的な操作活動による表現
1. 図的表現：絵、図、グラフなどによる表現
S1. 言語的表現：日常言語を用いた表現
S2. 記号的表現：数字、文字、演算記号、関係記号など、数学的記号を用いた表現
(J. S. ブルナーの E I S 原理：行動的表現 (Enactive Representation) の方が映像的表現 (Iconic Representation) よりも、また映像的表現の方が記号的表現 (Symbolic Representation) よりも、それぞれ早期に獲得され、理解されやすい表現である。)

本研究会議においては、このうち、図的表現を「絵」、「図」、「表」、「グラフ」の 4 つに、言語的表現を「メモ、つぶやき」と「(組み立てられた)話」の 2 つに、それぞれ細分化した。

そして、表現方法を、実物を用いた表現、半具体物を用いた表現、絵・メモ・つぶやき、図、表、グラフ、話・文章、式の 8 つに分類した。

E I S 原理同様、本研究会議でも、上の図において上部にあるものほど早期に獲得され、理解されやすい表現であるとらえている。ただ、ここで留意すべき



¹⁵⁾ 中原忠男他監修 清水静海編 『クリアール 数学的なコミュニケーションができる子ども』ニチブン、1999年 p.p.174-176

ことは、上にある表現は下にある表現に比べて劣っているとか、数学的な価値が低い（またはない）とかいうとらえではないということである。実際に子どもたちは日頃の学習活動の中で、友達に伝える（外に向かって発信する）ときには、相手の反応に応じてこれらの表現を十分に活用することが有効であることを経験として知っている。もし、教師が「式が最も優れた数学的表現である」というようなことを言ったならば、式以外の表現をしようとしなくなる子どもが増えるのは当然である。それは「自分の考えを表現することを大切にする」ことに逆行する。つまり本研究においては、実物を用いた表現から式による表現まで、すべてが問題解決に有効に働く表現方法であり、多様な表現方法を用いたり読みとったりすることにより、それぞれの数学的な価値を見だし、表現する力が高まっていくと考える。

もちろん、いつまでも具体的な表現ばかりしていて、いっこうに式で表そうとしなくてもよいと言っているのではない。より簡潔明瞭に表すこと 限られた文字や記号を用いて的確に表現することは、算数・数学教育において培われるべき大事な内容である。ただ、そのよさや美しさは、長々と述べようとすると煩雑になることや、現実に表現しきれない場面もあること、関係がみえにくくなることなど、反対側にある表現をして初めて感得できるものである。すなわち、より抽象化された表現のよさや美しさに子ども自身が気付き、かつ、いつでも他の表現方法に変換することができる状態になったときに初めて、その子自らが抽象性の高い表現に数学的な価値を見出したということができるのである。

（２）表現することを大切にするための手だて

表現する場を保障する。

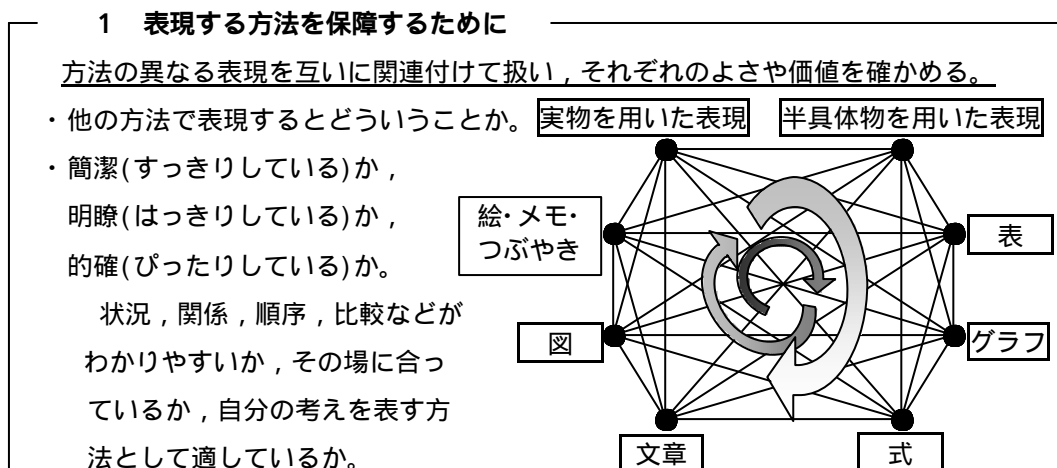
- ・表現するために十分な時間がある。（表現する時間の保障）
- ・具体的表現からより抽象的な表現までのすべてに価値がある。（表現する方法の保障）¹
- ・「解きたい」「わかりたい」という気持ちの下に生まれた考えには必ず価値がある。

（表現する内容の保障）²

- ・自分にも表現するチャンスが回ってくる。（表現する機会の保証）³

一人一人が自分にとっての問題を把握しやすいように、課題設定や発問を工夫する。

- ・場面（生活や既習との関連）が明確な課題や発問
- ・思考や表現の幅を広げる課題や発問
- ・表現する中身を自らつくる体験が豊富にもてる課題（課題づくり、発展的な課題の解決など）



<p>2 表現する内容を保障するために</p> <p><u>一人一人が表現したものの中にある数学的価値を見だし、発信する側もよみ取る側もそれぞれにその価値に気付けるようにする。</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ・すべての表現を同等に扱う。(教師側でランク付けをしない。) ・抽象 具 体 の行き来による高まりを意識する。(表現にはパワーがある。) 	<p>3 表現する機会を保障するために</p> <table border="0"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> <p><u>表現するのを待つ。</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ・教師は、必要以上の発問をしない。 ・子どもの思考を先取りしない。 </td> <td style="vertical-align: top;"> <p><u>子どもにより前時の学習を振り返る。</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ・継続して行う。 ・あらかじめ順番を決めておく。 ・表現方法は子どもに任せる。 ・毎時間のはじめに行う。 </td> </tr> </table>	<p><u>表現するのを待つ。</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ・教師は、必要以上の発問をしない。 ・子どもの思考を先取りしない。 	<p><u>子どもにより前時の学習を振り返る。</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ・継続して行う。 ・あらかじめ順番を決めておく。 ・表現方法は子どもに任せる。 ・毎時間のはじめに行う。
<p><u>表現するのを待つ。</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ・教師は、必要以上の発問をしない。 ・子どもの思考を先取りしない。 	<p><u>子どもにより前時の学習を振り返る。</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ・継続して行う。 ・あらかじめ順番を決めておく。 ・表現方法は子どもに任せる。 ・毎時間のはじめに行う。 		

(3) 表現の高まりについての評価

目的のある表現ができたとして評価できる現われ

- A1 表現することによって自分の考えが明確になった。
- A2 表現することによって自分の考えが整理できたり高まったりした。
- A3 表現することによって学習を振り返り、理解を深めることができた。
- A4 表現することによって新たな問題を発見した。

表現が高まったとして評価できる現われ

- B1 いろいろな方法で表現するようになった。
- B2 同じ表現方法において表現する内容を工夫し、より簡潔に表したり、より具体的に表したりして、相手にわかりやすく表現しようとした。
- B3 簡潔に表すためにより抽象性の高い表現をしたり、わかりやすくするためにより具体的に表したり、必要に応じて表現方法を選択するようになった。

表現の高まりを評価するための手だて

- ・発言やしぐさ、表情でみる。ビデオを活用したり、観察者を立てたりして、記録をとる。
- ・ノートやワークシートでみる。

(4) 検証授業

第1回検証授業「単位量あたりの大きさ」(導入) (9月26日実施 小学校6年生)

- 本時の目標
- ・部屋の混み具合を比べることを通して、2つの数量の関係について式や図、絵、言葉などの方法を使って、自分の考えを表現することができる。
 - ・混み具合は、人数と面積の一方をそろえれば比べられることに気付く。

表現を引き出すための手だて(重点)

- ・様々な方法で表し解決しようとするこのよさに気付くようにする。 <表現する方法の保障>
- ・教師が必要以上のことを言わず、子どもが考え、表現することを待つ。 <表現する機会の保障>

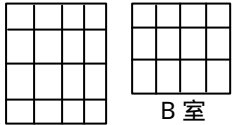
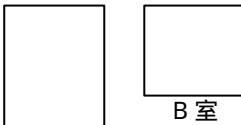
本時の展開

学習活動	子どもの表現の具体例
1. 生活場面から、「混んでいる」とはどういう状態を言うのか話し合う。	<ul style="list-style-type: none"> ・「満員電車。」 ・「スーパーでレジに人がたくさん並んでいる。」

2. 課題をつかみ自力解決をする。

修学旅行で泊まるホテルの部屋の割り当てが2タイプあります。
16畳のA室には12人、12畳のB室には8人泊まることになりました。
どちらの部屋が混んでいるでしょうか。

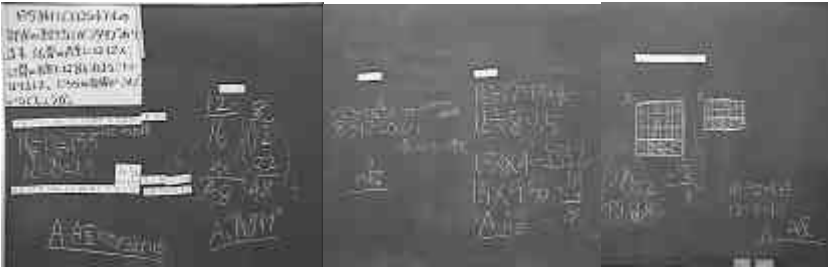
・およその部屋の様子を絵などに表す。
・広さの比が正しい図を書き 人数を書き込む。


 または
 

A室 B室 A室 B室

・「(上左図を基に)空いているのは両室ともに4畳だから同じ。」
・式によって表す。
A: $16 \div 12 = 1.333 \dots$ B: $12 \div 8 = 1.5$
A: $12 \div 16 = 0.75$ B: $8 \div 12 = 0.666 \dots$ など

3. 互いの考えを発表し合う。



式1 式2 式3 式4 図1

・式2 (畳数÷人数)の発表<式と言葉で説明>
・式1 (畳数÷人数)の発表<同上>...同じ考え多数
・式3 (人数÷畳数)の発表<同上>...人数を畳数で割っていることに質問が出る。
12÷16が表すものについて議論し、「1畳あたりの人数」と「1人当たりの畳数」の2つの見方があることを確認(この間、図1が説明に生かされる。)
・式4 (畳数÷人数)の発表<同上>...聞き手も話し手も式の意味がわからなくなり混乱したが、「1人に1畳ずつ当てていくと両室共に4畳ずつ余り、そこをそれぞれ12人と8人とで分けるといふふうに考えても解決できそうだ。」ということでアイデアが生かされる。(ここでも図1が活用される。)

(これより次時)

・その他の考え方(両室の畳数を48畳にそろえると、A室:36人、B室:32人となり、A室の方が混んでいる。)の発表<48畳の図と言葉と式で説明>
...式2を発表した子が自分の考えと同じだとつづやく。
・この考えと式2さらに式3を「畳数をそろえて比べようとしているもの」として関連付け、対して「人数をそろえて比べようとしているもの」として式1があることを確認する。

4. 学習のまとめをする。

2つの部屋の畳数または人数をそろえると混み具合を比べることができる。
1あたりの大きさでも最小公倍数当たりの大きさでも比べられる。
(この後、実際に16畳と12畳の広さを作り、それぞれ12人と8人とが入ってみて、混み具合を実感する。)

確かめられたこと

視点	子どもたちの様子	表現の高まりについての評価						
		A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3
重点表現する方法の保障	・自力解決の段階で、すべての子がワークシートに考えを表すことができた。(ただし、「まず式で表したい」という意識の子は少ない)							
	・互いの考えを発表し合う場面では、式による解決を吟味する際に図が有効に働いた。(図を描いた子も描かなかった子も、皆で図の有用性を実感、確認できた。)							
重点表現する機会の保障	・互いの考えを発表し合う場面では、皆が納得できてから先に進もうという雰囲気があった。(質問が一方通行あるいは一対一にならず、周りの子も問題を明確にしたり、一緒に解決しようとしたりしていた。)							
	・その結果、表現者自身も、何度も言う(聞く)ことによって内容や方法が少しずつ変化してゆき、考えを明確にしたり高めたりすることができた。							

(注)表現の高まりについての評価の記号は、10ページ(3)のA1~B3に対応

第2回検証授業「比例」(第4時) (11月27日実施 中学校1年生(標準コース/少人数))

本時の目標 ・水槽に水を入れていくとき、時間とともに変わっていく数量を見付ける。

・比例関係を見付けだし、言葉、対応、表、式、グラフで表そうとする。

表現を引き出すための手だて(重点)

・身近なところから課題を選ぶ。 <場面が明確な課題>

・何を y とするか、一人一人の発想を生かす。 <表現する内容の保障>

本時の展開

学習活動	子どもの表現の具体例
<p>1. 水槽に水がたまっていく様子(教師による実演)を観察する。</p> <p>2. 課題をつかみ自力解決をする。</p> <p style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">水槽に水を入れます。蛇口から水は一定の量で出ます。空の水槽に水を入れ始めてから5分たった今、水は10cmたっています。この水槽がいっぱいになるまでの時間を x 分とすると、変化することをいろいろな方法で表しなさい。</p>	<p>(縦40cm、横25cm、高さ35cmの水槽。数値は与えられない。)</p> <p>課題をよむ。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・「課題の意味がわからない」注水を再開し、様子を観察する。時間の経過に伴って変わるものを考える。 ・「水槽の水(増えていく)」「タンクの水(減っていく)」「水の量」 ・「水の重さ」 ・「水の深さ」 <p>変化するものを y として、今から x 分後の x と y の関係を表す。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・「水槽の大きさ(底面積)がわからなければならない。」実際に長さを測定「縦25cm、横40cm、高さ35cm」 ・水の深さを y cm として表や式、グラフに表す。
<p>2'. 変域について議論する。</p>	<p>表やグラフは20, 30, ...と、どこまでも続いていくと考えてよいか話し合う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・「ずっと続く。」 ・「水槽の高さを超えるのはおかしい。」 ・「いっぱいになるまでで止める。」 ・「いっぱいになるのは今から12.5分後だ。」 <p>左側のスタートはどうするかについて話し合う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・「0はいれない。」 ・「0からスタートする。」 ・「5分前から入れ始めたのだから、5分前から始めるべきだ。」
<p>3. 考えを発表し合い、他の表現方法を理解する。</p>	<p>表と式の関連について確認する。</p> <p>気付いたことを話し合う。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・水の深さを y cm とすると、x が1増えるごとに y は2ずつ増える。 ・水のかさを y cm³ とすると、x が1ふえるごとに y は2000ずつ増える。 ・水のかさを y ㍉とすると、x が1ふえるごとに y は2ずつ増える。 <p>変数 x, y の関係が、$y = a \times x$ (a は定数) という式で表されるとき、y は x に比例しているという。</p>
<p>4. 学習の振り返りをする。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・ x や y が負(マイナス)の場合もある。 ・ グラフは原点を通る直線になる。

確かめられたこと

視点	子どもたちの様子	表現の高まりについての評価						
		A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3
重点場面が明確な課題	<ul style="list-style-type: none"> すべての子が、かさ、深さ、重さのいずれかについて追求していた。 いつでも水槽に触れられるようにしたことにより、自分の問題を明確にするためにそばに行き行って状況を観察したり、問題解決のために必要な数値を測定しに行ったりする姿が見られた。 							
重点表現する内容の保障	<ul style="list-style-type: none"> かさ、深さ、重さと求めるものは異なっても、考え方や表し方について共通する部分があり、自力解決後の小グループでの話し合いでは、互いに何を表そうとしているかについて理解し合えた。 							
	<ul style="list-style-type: none"> 小グループ、あるいは全体で、表現者は、「自分が表現したことを相手がどうとらえるか」を意識することによって、表現をさらに高めて（高めようとして）いた。 発表では、表、グラフ、式、言葉の行き来ができた。 							
その他（機会）	<ul style="list-style-type: none"> 教師が、話しすぎない、急ぎすぎない、質問を先取りして答えないことによって、子どもの表現をさらに引き出すことができた。 							

(注)表現の高まりについての評価の記号は、10ページ(3)のA1～B3に対応

第3回検証授業「一次関数」(第3時) (12月3日実施 中学校2年)

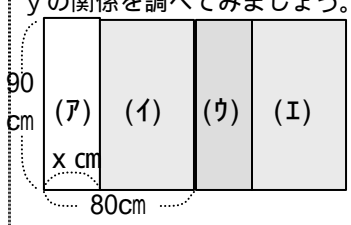
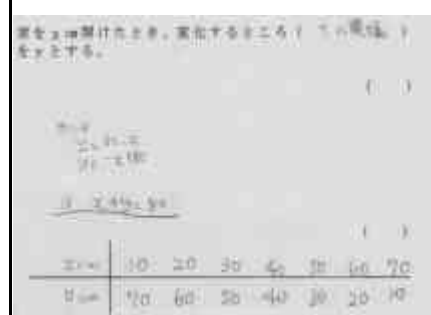
本時の目標 ・窓を開けたとき、それに伴って変化するところに着目し、その変化の仕方を自分なりの方法で表現する。

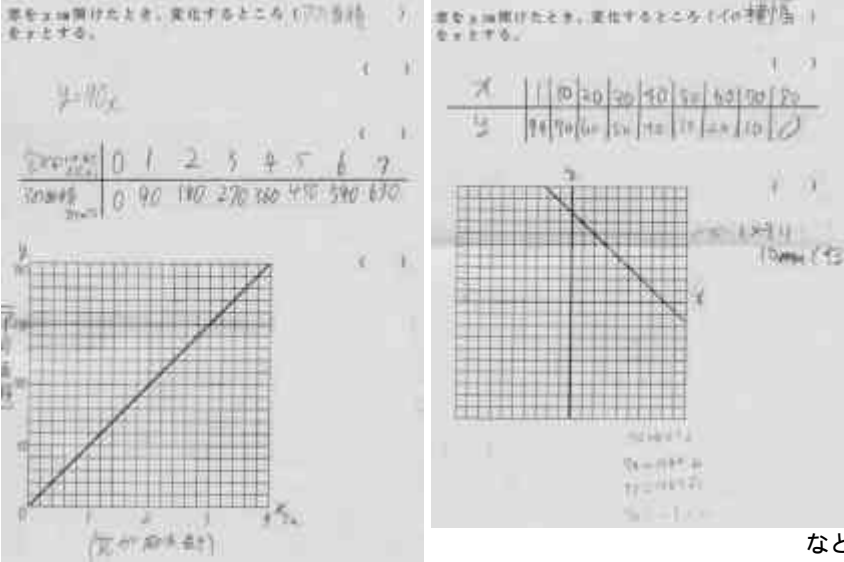
・文章、表、グラフ、式の相互の関連性を理解する。

表現を引き出すための手だて(重点)

- ・課題の把握と自力解決の時間を十分にとる。 <表現する時間の保証>
- ・数理的な考察があれこれ可能な課題にする。 <思考や表現の幅を広げられる課題>

本時の展開

学習活動	子どもの表現の具体例
<p>1. 課題をつかむ。</p> <p>下の図のような窓があります。この窓を x cm 開けたとき、変化するところを y とし、x と y の関係を調べてみましょう。</p>  <p>2. 変化するところを y として、x と y の関係を表す。</p>	<p>課題を把握する(1)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・「課題の意味がわからない。」 実際に窓を開け閉めする様子を観察する。 <p>課題を把握する(2) (変化するところ、しないところを把握)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・(イ)の横の長さ(はば) ・(ウ)のはば ・(エ)のはば ・(ア)、(イ)、(ウ)、(エ)の面積 ・「(イ)と(エ)は同じだ。」 ・「(ア)と(ウ)も同じだ。」 ・(ア)(ウ)、(イ)(エ)の周りの長さ <p>何を y とするかを決め(選び)、x と y の関係を式や表、グラフを用いて表す。</p> 

<p>3. 互いの考えを発表し、気付いたことを話し合う。</p> <p>次時 一次関数を定義する。</p>	 <p>など</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 比例しているものとしていないものがあるが、xが1増えた時にyが増える量はどれも同じである。 ・ グラフはどれも直線になる。 <p>yはxの関数で、$y = ax + b$ (a, bは定数)のように表されるとき、yはxの一次関数であるという。</p>
---	---

確かめられたこと

視点	子どもたちの様子	表現の高まりについての評価						
		A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3
重点 表現する時間の保障	・ 自力解決の時間を保証したことによって、一人一人が十分に表現することができた。							
重点 思考や表現の幅を広げられる課題	<ul style="list-style-type: none"> ・ 多くの子どもがまず式に表そうとした。 ・ 式に表せずにいる子も、やがて式にこだわらない表現をし始めた。 ・ 式で表せている子には「他の場面や、同じ場面でも他の表し方について考えてみよう。」や「どうしてこのような式になるのか説明できるようにしておいて。」といった発問が有効であった。 							

(注)表現の高まりについての評価の記号は、10 ページ(3)のA1～B3に対応

検証授業を通して得たヒントと課題

手だての視点	ヒント・課題
表現する時間の保障	<ul style="list-style-type: none"> ・ 子どもの主体性に任せるためには、表現されたものを「よむ」時間が十分になければ難しい。学習の重点化や効率化を図ることによって時間を生み出し、その時間を「よむ」ことや「振り返る」ことに使うようにしていくとよいと考える。
表現する内容や方法の保障	<ul style="list-style-type: none"> ・ 「他の表わし方もしてみましよう」という助言ばかりでなく、「自分の表現の根拠や友達の表現に対する意見」が友達にわかる(伝わる)ようにしよう」という助言をしていくことで、表現の多様化や深化が図れそうである。 ・ 単位を付けて表現すると、何を表現しているかが明確になる。ただし/($\bar{}$)を用いた表し方は小学生には難しい。また、扱いは継続して行う必要がある。 ・ 中学校1年生の検証授業では、子どもたちは式よりも表の方が表しやすい様子だった。しかし、実際には表をつくっていく際に式を使っている。そこに気付くことが表現方法の関連付けになる。 ・ 多様な表現方法を単に往き来するというだけでなく、それぞれの価値を明らかにしていくことによって、多様に表現するよさを感じていくことができるのではないだろうか。(例えば、グラフは変化の様子がわかりやすい、表はxに対応するyの値がわかりやすい、式は一般化できているなど)
表現する機会の保障	<ul style="list-style-type: none"> ・ 「発表の順は、皆の考えや表現、理解を助けるため」という認識をクラスに築いていくことが大事であり、そういうことを繰り返していくことによって「どれから言いたい」「どれから聞

	<p>きたい」という理由が、数学的になっていく。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・小グループでの討論が有効に働く場面が見られた。個と全体との間に小グループを入れることによって表現がしやすくなるということもある。ただし、初めからグループにしてしまっただけでは個の考えがなくなってしまうので、まず自分の考えを表現してみようということが前提となる。(子どもたちは、不安を解消したり自分の考えを振り返ったりするために、自然に近くの子と話したり見合ったりする。小グループによる話し合いについては、子どもの実態に応じて取り入れていくようにすればよい。)
評価	<ul style="list-style-type: none"> ・最終的な表現(授業後のノート)では、表現の高まりや深まりはわからない。時間経過、考えの出所などがわかるように色分けなど約束を決めることにより、教師も子ども自身も考えや表現を振り返る(評価する)ことができる。

研究のまとめ

1. 研究を通してみえてきたこと

(1) 「表現すること」と「問題を解決する力」

- ・「何のためにこの表現をしようとしたのか」という視点で子どもの表現を評価した。その結果、子どもが自分の考えを明確にしたり、整理し高めたり、学習を振り返り理解を深めたり、新たな問題を発見したりするために表現しようとしていることが確かめられた。これらは問題解決を支える活動である。したがって、表現することを大切にしたい授業を重ねていけば、問題を解決する力は高まると結論付ける。
- ・教師が「なぜ教えるのか」「何を教えるのか」という視点で教材研究をし、その上で、「何を表現しようとしているのだろう」「なぜこのような表現をしたのだろう」との視点で子どもの表現をよもうとすると、考えや表現の数学的な関連がみえてきたり、これまで意識していなかった子どもの姿がみえてきたりすることを実感した。さらに、子どもに対しても「何をしようとしているのか」「なぜその表現方法を用いているのか」を意識しながら表現するように投げかけていくことによって、「解ける」と「わかる」の一体化を図ることができるという見通しがもてた。

(2) 「表現する場の保障・課題設定や発問の工夫」と「算数・数学の面白さやよさの感得」

- ・「解きたい」と思える課題があり、表現できる時間が十分に保障されれば、子どもは多様な表現ができることが確かめられた。また、自分の表現したものが、方法の面でも内容の面でも保障されることにより、式にこだわらずに表現するなど、安心して表現するようになっていった。表現の機会を保障することによっても、受け身の姿勢ではなく自分から表現しようとする姿も見られるようになった。さらに、自分の表現が他の表現と関連付けられたり数学的に価値付けられたりすることに喜びを示していた。自分の考えを何らかの形で表し、自他の表現したものと対話を通して自分の考えを高めたり深めたりできたと感じたとき、私たちはそれを学びの面白さやよさを感じている姿であるととらえた。したがって、課題設定や発問を工夫し、表現する場を保障することによって、算数・数学の面白さやよさがさらに感じられるようになると結論付ける。
- ・表現することを大切にすることによって、これまでと違う算数・数学にかかわろうとする自分を発見したり、これまで知らなかった友達や教師の意外な面を見付けたりしている姿が見られた。みえなかったものがみえてきたという経験も、学習に実感や感動を生み、さらには算数・数学の面白さやよさ、美しさの感得へとつながっていくものである。

2. 今後に向けて

- ・表現の高まりや深まり、問題を解決する力の高まりの評価については、研究・検証が不十分である。今後、具体的な子どもの表れと照らしながら、さらに深める必要がある。

- ・研究の結果，学年が上がるに従って，式に表そうとする意識が強く働いていることが確かめられた。これは，これまでの算数・数学教育の成果ということもできる。式に表そうとすることを否定するのではなく，式と他の表現方法とを常に関連付けられるようにし，それによって「式は全部が凝縮されていて美しいものなのだ」ということを伝えていく（気付かせていく）ためにはどのようにしていったらよいか，そのための指導の工夫が今後の課題となる。
- ・考えを表現することを大切にしていこうとすれば，一人一人を大切にし，解答に至るまでの過程を大切にすることになる。このことは，少人数指導や発展・補足的な学習に対する考え方とも一致する。今後は，今日的課題やそれに関する様々な指導法の有効性について議論する際にも，「表現」という視点を持ち，「なぜ」「何を」というキーワードを基に考えていきたい。

研究を進めるに当たり適切なご助言をいただきました先生方，研究にご支援，ご助言をくださいました校長先生はじめ学校教職員の皆様，そして研究の検証に協力して下さった児童生徒のみなさんに，心より感謝し厚く御礼申し上げます。ありがとうございました。

【参考文献】

G.ポリア（柿内賢信訳）『いかにして問題をとくか』丸善	1986年
S.ラング（松坂和夫／大橋義房訳）『さあ数学しよう』岩波書店	1987年
菊池兵一『数理への道』東洋館出版社	1997年
清水静海『子供の問題解決を支援する算数授業』明治図書	1998年
『数学的な表現力を育てる算数指導』埼玉県算数数学教育研究会小学校部会	1998年
『数学的な表現力を育てる算数指導の展開』埼玉県算数数学教育研究会小学校部会	1999年
根本 博『数学的活動と反省的経験』東洋館出版社	1999年
根本 博『中学校新教育課程の解説』第一法規	1999年
『小学校学習指導要領解説 - 算数編 - 』文部省	1999年
『中学校学習指導要領解説 - 数学編 - 』文部省	1999年
田中博史『算数的表現力を育てる授業』東洋館出版社	2001年
片桐重男『算数科の指導内容の体系』東洋館出版社	2001年
片桐重男『間違いだらけの算数指導』明治図書	2002年
佐伯 胖『「わかる」ということの意味』岩波書店	2002年
河合隼雄，谷川俊太郎『こころに届く授業』小学館	2002年
中原忠男編『算数・数学科 重要用語 300 の基礎知識』明治図書	2002年

【指導助言者】

筑波大学助教授	清水 静海
川崎市立小学校算数教育研究会長（川崎市立玉川小学校長）	鈴木 陽一
川崎市立小学校算数教育研究副会長（川崎市立白山小学校長）	菊池 俊光
川崎市立中学校教育研究会数学科部会長（川崎市立田島中学校長）	馬場 尚志
川崎市立中学校教育研究会数学科副部会長（川崎市立宮前平中学校長）	川瀬 純一
川崎市教育委員会学校教育部指導主事	市野 典明
川崎市総合教育センター研修指導主事	大串 一彦
川崎市総合教育センター研修指導主事	白井 理