

根拠を持って表現する力を育てる算数・数学科の授業改善

算数・数学科研究会議

金田 昌之¹

今井なつき²

高橋 徹³

中村 真紀⁴

要 約

話し合う・説明する・伝え合う、といった「表現の場」を大切にしたい授業づくりをめざしたい。子どもたちは、自分の考えを表現して友だちや先生と意見交換をしていく途中で、新たなきまりを発見したり、自分の考えを整理したりする。友だちに自分の考えを懸命に説明することで、自らその誤りに気づいたり、より深い理解につながったりすることもある。自分の考えを「表現する力」は社会に出てからも重要であるといえる。

根拠を持って表現する力は、自分の考えを友だちに説明するような学習活動を通して高まっていく。自分の考えを論理的に説明するためには、その根拠を明らかにする必要があるからである。子どもたちは根拠を示すために、表・式・グラフあるいは言葉など、数学的な表現を使うことがより便利であることに気づく。そのことは、数学の知識や理解を深め、数学的な見方や考え方を育て、関心・意欲を高めることに密接に関わっていくと考えてよいだろう。そこで、本研究では、「自然と疑問がわき上がってくる課題の提示」「表現する時間の保障」「表現の習熟」に視点をおいた授業改善について研究をすすめてきた。研究を通して「課題設定の工夫」「間違っていることを説明すること」や「表現活動を支える有効な発問」などが子どもたちの表現する活動をより活発化し、根拠を持って表現する力を育てることにつながっていくことが、少しずつ見えてきた。

キーワード：表現する 伝え合う 数学的なコミュニケーション 表現の習熟

目 次

I 主題設定の理由	授業実践 2	43
1 生きる力を育てる算数・数学	授業実践 3	44
2 全国学力学習状況調査とPISA	III 研究のまとめ	
3 PISAの結果と表現する力	1 研究の成果	
II 研究の内容	授業実践 1 から	44
1 研究の構想	授業実践 2 から	45
2 研究対象	授業実践 3 から	46
3 調査研究と授業実践の実施時期	2 研究を通して見えてきたこと	
4 研究の実際	(1) 数学的な表現への抵抗感を減じる	46
(1) 子どもたちはどう表現するのか	(2) 「間違っている」ことを説明する	47
(2) 表現に関する調査	(3) 活発な表現活動を支える発問	47
(3) 授業実践へのアプローチ	3 表現する力を育てる授業の提案	47
(4) 授業の実践	【参考文献】	48
授業実践 1	【指導助言】	48

¹ 川崎市立南菅中学校総括教諭（長期研究員）

² 川崎市立菅生中学校教諭（研究員）

³ 川崎市立日吉小学校教諭（研究員）

⁴ 川崎市立京町小学校教諭（研究員）

I 主題設定の理由

1 生きる力を育てる算数・数学

数学であつかう言葉や概念の多くは、実際には存在しない場合が多い。例えば、本当の意味の「直線」は人にはかけない。幅が無く、完全にまっすぐな線はどんな筆記用具をもってしてもかくことはできないが、概念として「直線」を定義して、そこから図形を論じるのが数学である。使う言葉をしっかりと定義し、「～だとしたら、～であるから、～ということがいえる」というように筋道を立てて考え続ける。それを基盤として、他人と考えを交換したり、共有したりすることができるのが数学の特徴である。「幸福」や「情報」「未来」といった言葉は、具体的に目に見える物を指している言葉ではなく、人間の考えの中に概念として存在している言葉である。「数学なんて勉強して何の役に立つの？買い物でおつりの計算ができればそれで困らないよ。小学校の算数の勉強さえしっかりやっておけば十分だよ」という言葉をよく耳にする。このことは、目に見えないものについて考える論理的な力は、普段の生活では一見重要ではないように思っている子どもの心の表れともいえるだろう。現代は、職業選択の自由、豊富にある商品から選ぶ自由など、選択肢の多い社会である。そうした社会では、目に見えない概念について論理的に考え、判断していくことができなければ、本当の意味の「生きる力」が身に付いているとはいえないのではないだろうか。

2008年3月、PISAショックの余波が未だに癒えない中、新しい学習指導要領が告示された。理数教育の見直しが叫ばれつつ、算数・数学科においては「授業時間の増加」「以前の削減内容の復活」など一般にわかりやすい表現が新聞の見出しを賑わせている。新しい学習指導要領では、これからの社会を生き抜くために必要な力を身に付けるため、各教科で焦点を当てるべき部分について、細部に渡って言及している。算数・数学科における言語活動の充実もそのひとつである。重視する内容として「言葉、数、式、図、表、グラフを使って論理的に考え、根拠を明らかにして筋道を立てて説明し、伝え合う活動」が謳われている。算数・数学教育に携わる教師は、こうした活動がますます重要性を帯びてくることを意識しながら指導をしていく必要があるだろう。

2 全国学力学習状況調査と PISA

国際調査(OECD/PISA)の結果は、日本の数学教育に大きな影響を与えている。平成19年度から実施された文部科学省全国学力・学習状況調査においても、その結果を基に様々な分析報告がなされているが、傾向として都道府県・市町村ごとの正答率に注目が集まりがちである。自分の県と他県との比較や、正答率上位の県の教育システムに注目するだけでは、結果の見方として物足りない。

全国学力・学習状況調査で出題されている問題に着目してみると、PISAの問題が意識されていることがわかる。特に算数・数学のB問題は、我々にいろいろな提案を投げかけてくれている。出題形式を見てみると、「授業でこういう問題を扱ってみてはどうか」という提案ではないだろうか。「言葉や式を使ってかきましよう」という形式の問いが、小6では13問中5問、中3では15問中6問出題されている。解答方法に表現(記述)する形式を求める問題である。たとえ問題を解くことができても、その解答を的確に記述表現できなければ正答とならない。算数・数学において「表現する」ことが今まで以上に求められていることが示されている。

3 国際調査 PISA の結果と表現する力

国際調査(OECD/PISA)において、日本の数学的リテラシーの総合順位は、2000年：1位、2003年：6位、2006年：10位という結果が公表されており、年を追うごとに順位を落としている。統計的にはいずれも1位グループに属していると見る一方、結果を詳細に分析してみると、OECD加盟国平均

より正答率の低い問題にいくつかの特徴がある。

日本の現行の学習指導要領の算数・数学科領域について、OECD 加盟国のカリキュラムと比べてみると「確率や統計・資料の活用」分野の学習量が少なく、数学を使って身近な問題解決するという観点が不足している。また、各問いの正答率に着目してみると、自由記述形式の問題の正答率が低いという特徴が見られる。下の図1は、PISA2003(数学的リテラシー)で公開されている問題のひとつである。

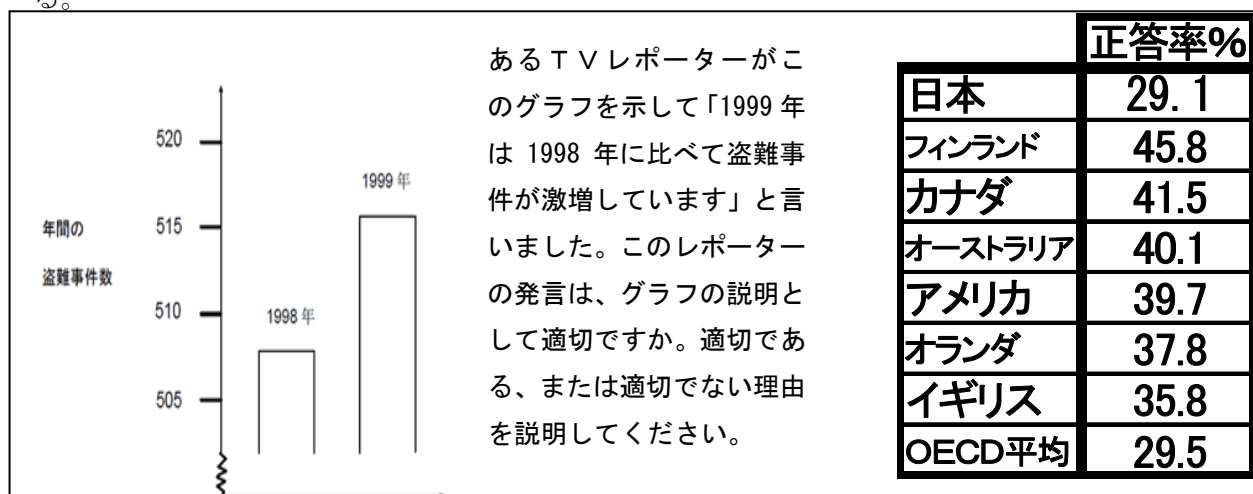


図1 PISA 公開問題

この問題の主要国の正答率は図1の通りで、日本がOECD平均に満たない問題（11問／84問）のうち、公開されている問題の中で最低の正答率である。

ここでは、グラフの解釈として「激増した」という表現が適切か否か、数学的な根拠に基づいて判断し、その根拠を説明する力が問われている。激増の意味を、数学で学んだ「増加率（割合）」や「グラフ表現」に関連付けて記述表現する必要があるのだが、日本の生徒は、グラフを正しく読み取っているにもかかわらず、その理由を記述表現せずに白紙解答が多いため平均点が低くなっている。

田中¹⁾はこの問題を「実生活で生じやすい『真正性』のある状況設定であって、数学的リテラシーの機能が試されるよい問題である。解答としては『適切でない』としたうえで、その数値の絶対的な意味と相対的な意味の両方を考慮した説明が求められている。」としている。

しかし、よく調べてみると、アメリカで使用されている教科書には、「Misleading Graphs（誤解しやすいグラフ）」という独立した単元が存在している。しかもこの内容だけで6ページ以上にわたって記載されている。「グラフが読み間違いやすい理由をいいなさい」「このようなグラフはどういう印象を引き出すためにつかわれていますか？」という設問がつづき、記述表現を要する出題形式をとっており、さらに練習問題へとつながっている。図2はアメリカの教科書の該当単元の1ページ目である。同様の内容がオーストラリアの教科書でも確認することができた。

これに対して、日本の教科書では小学校4年において「目盛りの下をはぶくグラフ」としてわずかに触れているが、そうしたグラフがあるということを確認することに留まっている。つまり、「誤解し

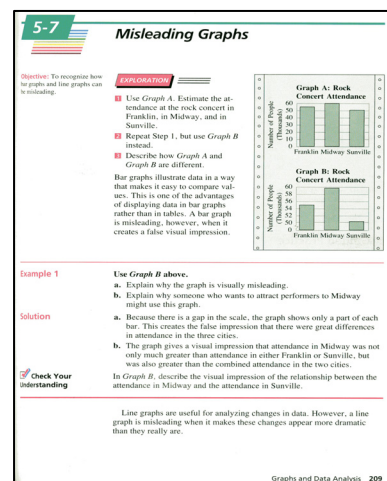


図2 Mathematical Connections 1992 McDougal Littell

アメリカの中学校教科書

¹⁾ 田中耕治著 「新しい学力テストを読み解く」日本標準 2008年

やすいグラフ」に関する限り、日本の正答率が低い理由は、このような形式の問題に触れる機会が無いということではないだろうか。古くて新しい問題である「出題の公平性」についても考えに入れながら、PISAの調査結果を見る必要があるだろう。

日本では関数の変化の様子を言葉で表現したり、統計的に扱ったりする学習については小学校、中学校とも取り上げることは確かに少ない。実生活の中で全体の傾向や特定の項目の推移を読み取ったり、今後どう変化していくかを予想したりする資料として、グラフを活用する必要に迫られることは多い。日本の子どもたちはそうした問題に取り組む機会が少なく、現実生活と数学世界を関連づけて考え、自分の考えを適切な言葉や記号で表現することを苦手としている点が見えてくる。今後、このような国際調査で問われているような社会で数学を活用する力を育成するには、数学を使って問題を解決し、その方法や根拠を言葉や記号で記述表現する指導を丁寧に行っていく必要があるだろう。そこで本研究では、子どもたちが算数・数学科の授業において、意欲的に表現する場面のある授業展開を想定し、授業改善に役立てる研究を行うこととし、次のような研究主題を設定した。

研究主題 **根拠を持って表現する力を育てる算数・数学科の授業改善**

数学には、日常語とは別の、数、記号、式、図形、グラフといった数学独自の考えを伝えるための道具がある。これを使って、話す、書く、示すといった方法で自分の考えを表現し、相手の考えを理解する。こうした活動は教師と子どもだけでなく、子ども同士でのかかわりの中で、これらの道具を使い、表現しあうことで互いの知識や考えが深められていくのである。そこで、「表現する力」を「式や図、言葉による表現等で自分の考えを表し、数学の知識を深めたり、数学的な見方や考え、興味・関心を高めたりすることにつながる力」と、とらえることとした。

II 研究の内容

1 研究の構想

本研究では研究主題に基づき「表現する力」の視点から、通常の単元の中での課題設定や授業構成を見直す研究を進めた。具体的には表現する場の設定、授業展開、表現を促す教師の発問等を見直すことで、授業改善のポイントを明らかにしていく。さらに、表現を促す課題そのものや提示方法の工夫なども、子どもが「表現する」という視点から見直していきたい。

- 子どもたちは算数・数学で「どのように表現するのか」を調査し、表現の様相を探る。
- 表現する力を育てる学習場面を想定し、「授業改善のポイント」を具体化する。
- 「授業改善のポイント」を意識した実践授業を行う。
- 「表現する力」を育てる題材を提案する。

2 研究対象

川崎市内の小・中学校の児童生徒（小学校5年生 33名、小学校6年生 32名、中学校1・2年生 33名）を対象とした。

3 調査研究と授業実践の実施時期

5月～11月に川崎市内小学校5年、6年、中学校1年について調査・授業実践を行った。

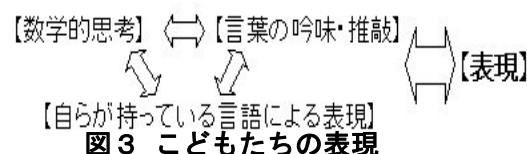
- 小学校5年生：単元名「小数と整数のかけ算、わり算」
- 小学校5年生：単元名「三角形や四角形の角」
- 中学校1年生：単元名「比例と反比例」
- 表現に関する調査 小学校5年、6年、中学校1年

4 研究の実際

(1) 子どもたちはどのように表現するのか

子どもたちは算数・数学の教科書の記述や教師の板書、配付される印刷物の数学的な記述表現から少なからず影響を受けている。小・中学校算数・数学の教科書では発達段階を考慮し、

使う用語、言いまわし、表現方法を変えながら、学年が上がるにしたがって、簡潔、明瞭、的確な数学的な表現ができるように構成されている。そうした表現を目にしている子どもたちは、日常的な会話で使う言葉とは異なる特別な表現として数学的な表現を次第に身につけていく。子どもたちが数学的な表現をするまでの過程は、【思考】→【表現】といった単純なものではなく、図3のように重層的、複線的なものであることが理想であるが、現実にはそうした段階を踏まずに、直観的に表現をしていることも多い。そうした表現の問題点を明らかにするために、次の調査を実施した。



(2) 表現に関する調査

(ア) 調査対象 小学校5年（33名）、小学校6年（32名）、中学校1年（33名）

問題「友だちにつたえよう」

右のようなものがあります。このように、あいてに見せないで言葉だけでつたえます。正確につたえるには、何と書いてつたえたらよいでしょう。

①つたえる言葉を下にかきましょう。

②実際にあいてにつたえましょう。※とちゅうで説明を追加しないこと

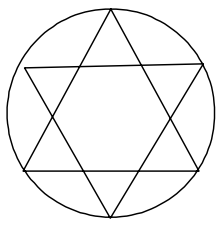


図4 表現の調査問題

(イ) 調査内容 問題は、円に内接する2つの正三角形からなる図形を提示し、その図形を他の人に伝えるためにどう表現すべきかを問うものである。言葉だけの表現で、図を正確に相手に伝えるためには「図形の構成要素」と「それらの位置関係」を認識して正しく表現する必要がある。この場合の最も望ましい表現は、送り手の伝えようとする図形に関する表現が唯一つに決定できるような表現になっていることである。ここでは単に正確に図形が伝わったかどうかをみるだけでなく、送り手の子どもはこの図形の特徴をどう認識し、数学で使う言葉に変換して表現しているかをみる。さらに、受け手が解釈してかいた図を分析することで、うまく伝わらなかった表現はどのような表現で、どこに問題があったのか、どのような情報が不足していたのか。的確に相手に伝える表現はどのような表現が良いのかを見ていくため、分析の観点を以下のように設定した。

- 図形の構成要素の認識とその記述表現（円、2つの正三角形等をどう認識し、どのように記述表現しているか）
- 図形の構成要素間の関係とその記述表現（円と正三角形の位置関係、正三角形同士の位置関係をどう認識し、どのように記述表現しているか）

(ウ) 調査結果

①算数・数学で使われる言葉

数学で使われる用語を学習する学年はそれぞれ次の通りである。

「円」「正三角形」「頂点」…小学4年	「六角形」…小学5年	「弧」「接する」…中学1年
--------------------	------------	---------------

学習したからといって、その用語を正しく使用できるとは限らない。「円」については就学前から使用してきた「まる」をそのまま使用している児童がかなりの数にのぼった。

この課題では、図形を相手に伝える言葉として子どもたちが選んだ言葉は、小学校段階では「まる」「さんかく」「2つ」「星のかたち」「ろっかくけい」等である。相手に伝える言葉は、これらの図形

の構成要素を中心とした表現をバラバラに、または文章化してつなげたりしたものである。位置関係については「その中」「まるの中」「さかさま」「ぎゃく」「はんたい」「くつつく」などの表現も出てくるが、位置関係には触れずに構成要素のみで表現している子どもも多い。

表1 送り手の表現と受け手がかけた図の例

×…送り手の表現×、図× △…送り手の表現×、図○ ○…送り手の表現○、図○

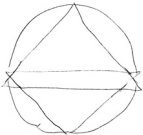
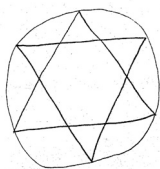

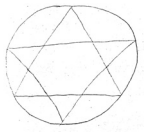
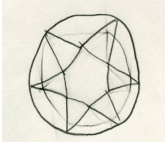

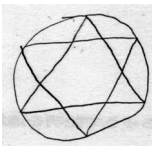
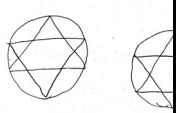
正誤	送り手が表現した言葉	受け手の図	正誤	送り手が表現した言葉	受け手の図
×	丸の中に三角を2つてっぺんを上下にして三角をかく。かさねる(小5)		△	大きい丸をかいてください。その中に三角形を1つ3つの角が丸にくつつくように書いて、その次にその書いた三角形の上に逆三角形をまた3つの角が丸にあたるように書いてください。(小6)	
×	まず、大きなまるがあります。その中に、ほしがあります。そのほしは、まるの中にあります。(小6)		○	円があります。円の中に入るギリギリの正三角形が上下に重なっています。三角形の頂点は弧の接点となります。(中1)	
×	まず、六角形をかきます。六角形の辺から三角形をかきます。その星の形を丸でかこみます(中1)		○	円をかいて、その中に正三角形をかきます。その正三角形の頂点は3つとも円周と交わるようにかきます。その正三角形と中心は同じ場所で向きが反対な正三角形を同じようにかきます(中1)	
△	円の中に正三角形を2つ上下逆さまに重ねる(小5)		○	円の中に大きい正三角形があり、三角形の3つの頂点は円の弧に接している。また、その正三角形を真逆にした正三角形が重なっている(中1)	

表1において、△は「送り手の言葉」が不正確であるにもかかわらず、受け手の図は正しくかけている例である。送り手の「中に」という表現だけで、「円と内接する」と受け取っている。「まる」＝「円」と解釈していることが普通で、互いに同じ了解があれば表現が不正確でも正しい図が伝わる事が確認できる。正しく伝わらなかった事例は、円と正三角形の位置関係に関する部分に問題が多い。

表2 円と正三角形の内接関係の表現の様式

5年	6年
ちょうどはまる三角をかく	正三角を円の中に最高に大きくかく
角がまるにくつついている	三角形の大きさは円いっぱい大きさ
かどが一つの円にくつついている	その中に一番大きく書ける正三角形を2つかく
三角形が円の中にきちんとはまるように	ちゃんと3つの角がちょうど円に触れるくらい

内接関係を表現する用語をもたない小学生は表2の例のように表現している。「内接」という言葉を知識として持っていないとしても、円と正三角形の頂点が接している様子を、日常用語を駆使しながら、表わそうと努力していることがわかり、その表現は思いのほか豊かである。しかし、図形の構成要素

の表現と比べ、関係を表現することの難しさがうかがえる。

②学年による表現の発達の様相

図5は、送り手の表現の良否とは関係なく、受け手が正しい図をかけた割合である。学年が上がる

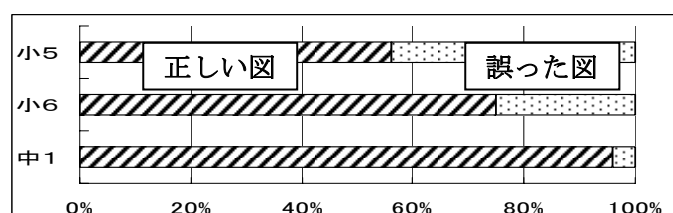


図5 正しい図がかけた

にしたがって、正しい図がかかる率が上がっている。さらに、表現の言葉の学年による発達を見みるため、「円と三角形の位置関係」について言及しているかどうか、また、どの程度正確に表現しているかという観点を設定して分析する。

○正三角形が円の中にあるだけでなく**内接**していることを表そうとしている

例：「大きい円をかいて、その中に三角形を3つの角を円にくっつくようにかいてください」

○円の**中に正三角形がある**ことのみで、内接していることは表現していない

例：「大きな円がある。その中にはいる正三角形が2個ある」

○内接関係にまったく**触れていない**

学年が上がるにしたがって、「内接」という言葉は使わなくても、図形の要素間の位置関係について表現する割合が高くなっている。円と正三角形の位置関係を相手に伝えないと、図が正確に伝わらないことを認識できる子どもの割合が増えている。

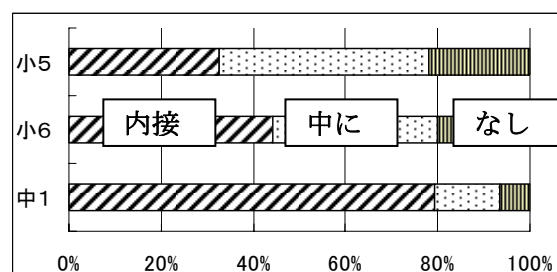


図6 位置関係表現の発達

③直観的な表現から根拠を持った表現へ

送り手は、自分の表現を受けとった相手が「白いキャンパスに」どのような図形をかいていくか想像することによって自分の表現を修正し、洗練していくことができる。伝える側が受け取る側の思考過程を意識した表現ができるかどうかで、正しく伝わるかどうかが決まる。与えられた図形を見たまま、感じたままの表現では、バラバラな図形の構成要素だけの表現となり、受け手は統合された図をかくことができない。つまり、何も根拠を持たずに直観的に感じたままの言葉で表現した場合には、相手に正しく伝わらない。

④自然に伝わる様々な情報

この課題に取り組む際には「言語表現のみの伝達」という制約をしている。しかし、やりとりの様子を観察していると、言語以外にも様々な情報が自然と伝わっていることが見てとれた。送り手は、受け手の様子を見ながら「表情」「言葉のニュアンス」「言葉の強調」「同じ言葉の繰り返し」など自然な形で言葉以外の情報を相手に伝えている。普通の授業で行う話し合いの場面では、自然にそうした表現でコミュニケーションを取り合っており、当然のように言葉以外の多くの情報も伝え合っている。数学的な表現を使って、相手に伝える経験を重ねていくことで、次のようなことが期待できる。

○数学用語の知識が増え、使用できる用語を増やす

○相手がどう思考するかを意識しながら、伝えるために必要な情報を選別する

○相手の表情や動作の情報を受け取ることで、自分の表現を再度見直したり、修正したりすることを繰り返す「表現のフィードバック」が行われる

課題によって「絶対に必要な表現」と「ここでは必要ない表現」を選び出し、そぎ落としていく経験を積むことによって、次第に洗練された表現になっていく。そうした表現はしっかりした裏づけがあり、「根拠を持った表現」といえるだろう。「根拠を持った表現」を積み重ねることで、次第に「簡

潔」「明瞭」「的確」な表現ができるようになっていく。

(2) 授業実践へのアプローチ

①算数・数学科における「表現する力」の分類

中原²⁾ は、算数・数学で用いられる表現を次の5つの表現様式に分類し、その表現様式が児童・生徒の数学知識の構成過程において重要な働きをすることを示している。

- a. 記号的表現：数字、記号などの数学的記号を用いた表現。規約的であることから正確で明確な表現である。
- b. 言語的表現：日本語、英語等の日常語を用いた表現。日常語を用いるので親しみやすい表現である。
- c. 図的表現：絵や図、グラフなどによる表現。視覚に基づくもので、直観性、イメージ性に富む。
- d. 操作的表現：教具など動的な操作をする表現。半抽象的な人工的具体物を活用するのが特徴。
- e. 現実的表現：実物等による表現。身の周りにある物を活用し、実世界と数学を結びつける。

一般的な授業で「表現する力」について考えてみると、a～eの表現が混在し、組み合わせられながら表現されている。

②表現する力を高めるための指導ポイント

全国学力・学習状況調査川崎市報告書(2008年3月)では、算数・数学科の授業改善に関して本研究会議の研究主題に関わる提言がなされている。普段から図や数、式、文字などを積極的に用いたり、自分の考えを言葉で記述させたりする学習活動を増やすなど、指導の充実を図る必要があることを指摘しており、授業における指導のポイントとして次の6点をあげている。

- 子どもの考えをつないで授業を組み立てる
 - ・教師は子どもの発言に耳を傾ける
 - ・子どもが話す時間を十分に保障する
 - ・意見交換の場を設定する
- 言葉、式、図、表、グラフ等で表現
 - ・自分の考えを自分の言葉で表現する活動を設定する
 - ・言葉や式、表、グラフを用いて説明する活動を丁寧に行う
 - ・単語の羅列でもよいが、キーワードを押さえた発言をさせる
 - ・ひとりではできない場合は、他者に補わせ、説明を完成させる
- 整理する、比較する、統合する
 - ・発表されたことをじっくりと考察する時間を保障する
 - ・同じやりかたのものをまとめて整理したり、比較したりする
- 式をよむ、解釈する
 - ・言葉や式で表された他者の考えをよみとり、その考えを代わりに説明したり、新しい場面にその考えを用いたりする活動を行う
- 子ども同士が互いに「やりとり」する
 - ・周囲の子ども同士で情報交換する活動を取り入れる
 - ・互いの考えを交換することで、考えを整理し解決方法の手がかりをつかむ
- 教師の「おもしろい」の感覚を大切にする
 - ・「なぜ？本当？やってみよう」と自然とわきあがってくる課題の設定に心がける
 - ・数学的な表現の良さを感じさせる

上記6点の指導のポイントは、授業実践を通して子どもが表現する力を育てるために注目すべき点について、重要な視点を与えてくれている。本研究会議では、これらの視点をふまえながら授業改善のポイントを次の3点に絞った。

授業改善のポイント

- (ア)「なぜ？本当？やってみよう」と自然とわきあがってくる課題を提示する
- (イ)表現する時間を十分に保障し、意見を交換する場面を設定する
- (ウ)数学的な表現に習熟できる授業計画をたてる

²⁾ 中原忠男著 「算数・数学教育における構成的アプローチの研究」 聖文社 1995年

③授業改善のポイント

(ア)「なぜ？本当？やってみよう」と自然とわき上がってくる課題を提示する

教師が何を学ばせたいかを意識して課題を工夫することが重要である。しかし、子どもが表現したくなるような動機付けのない課題では活発な表現は望めない。自分の考えに不安があると、「なぜ？本当？」という言葉が自然発生的に湧き上がり、人と相談したり確認をしたりするものである。適度に難易度があり複数の解決の道筋がある課題や、「やってみよう、ためしてみよう」という課題を設定することで知的な好奇心が刺激され、考えを伝えたい・表現したいという動機につながると考えた。

(イ) 表現する時間を十分に保障し、意見を交換する場面を設定する

子ども同士が異なる意見や表現に出会うことで、自分の考えを振り返る場面ができる。授業計画の中に、表現する時間を確実に設定し、気づいたこと、考えたことをできるだけ書き留めておくように指示する。意見交換を通して様々な表現の方法を知ったり、それぞれの良さを感じたりすることもできる。グループでの意見交換では、身振り手振りや表情、ノートやメモ、図や表をその場で書きなぐるなどどうしても、気軽に意見交換することができる。クラス全体では、「多数の人に、客観的にわかりやすく説明するためにはどうしたらよいか」を必然的に体験することができる。必要な表現を整理し、順序良く根拠を明らかにして表現する力が磨かれる。

(ウ) 数学的な表現に習熟できる授業計画をたてる

授業中に教師から表現を促された子どもは「どう言っているかわからない、思いつかない」「みんなの前では恥ずかしい」といった発言をよくする。表現の手順や作法に習熟することで、そうした壁を乗り越えることができ、さらに、表現することの喜びを感じることで積極的に表現しようとする態度につながる。教師は子ども同士がやりとりする場面を意図的に設定したり、表現が活発化するようにコーディネートしたりする役割を担う。

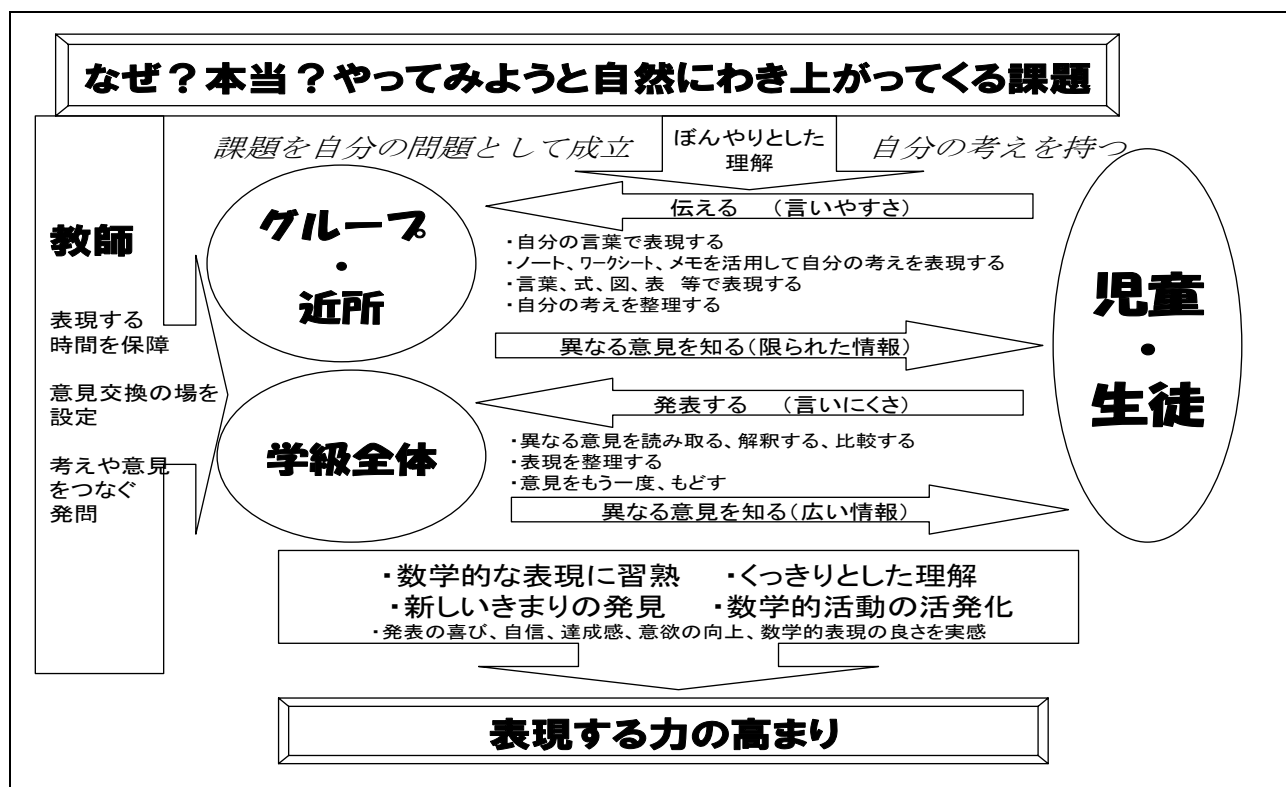


図7 授業改善モデル

(3) 授業の実践

授業実践 1 (2008 年 5 月 27 日実施)

【1】対 象 川崎市内中学校 1 年生 (男子 18 名、女子 15 名、計 33 名)

【2】単元名 「比例と反比例」(14 時間扱い) 本時 (1/14)

【3】題材について

文部科学省国立教育政策研究所平成 17 年度実施「特定の課題に関する調査」の問題を改題して生徒に示した。

右の図のように、底が階段状の直方体の水槽があります。この水槽に毎分同じ量ずつ水を入れていきます。水を入れてから満水になるまでの時間と水面の高さをグラフに表すと、①～⑤のどのグラフになりますか。

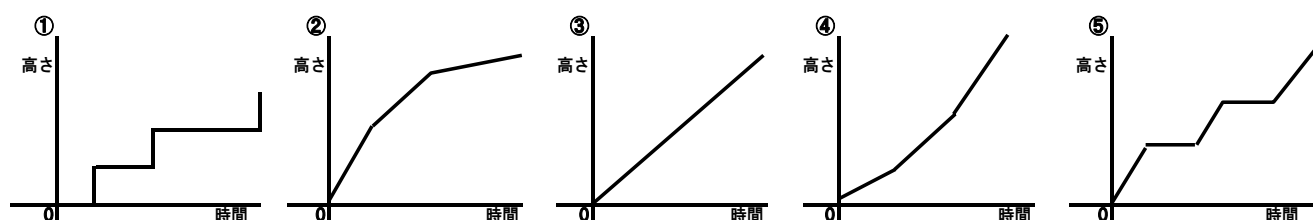
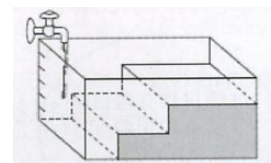


図 8 グラフを選ぶ

この問題を「AさんとBさんはこのグラフを下のようにかきました。あなたはどちらが正しいと思いますか」という問いの形式に変えた。

AさんBさんのグラフは、どちらも誤ったグラフなのだが、国立教育政策研究所の調査では、56.8% (合計) の生徒がこの2つのグラフ (上の図の①と③) を選択している。一見すると惑わされる複雑さがあるが、階段の段のそれぞれの変域に限っては、直方体に一定の割合で水を入れていくという問題に収束できる。小学校で学習してきた比例等の既習を生かして推論することが可能な課題である。底の形が階段状なので、自然に①を選択してしまうのであろう。しかし、グラフが水平になる・垂直になるというのはどうということなのか、一定の割合で普通の水そうに水を入れた場合のグラフに比べるとどうなのかを注意深く思考させたい。③のグラフは水そうに一定の割合で水を入れる場合であるが、底が階段状になっていると、水の高さにどう影響するのか。階段が3段になっていることはグラフではどう表れるのか。水のたまる部分の大きさが違うと何が変わるのか等、様々な部分に注目していくことで、活発な数学的活動が行われることを期待する。

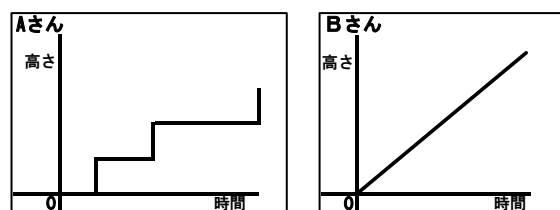


図 9 どちらが正しいですか?

授業改善のポイント (ア) 自然と疑問のわき上がる課題

課題の提示の仕方を少し変えるだけで、授業ががらりと変わることがある。生徒自らが課題に対し疑問を持つことで、人に伝えたいと感じる思いが生まれ、数学的な活動が活発になるのではないだろうか。自分の疑問を人に伝えたいという思いが動機になるとき、言葉や式や図を駆使しながら、根拠を持って表現する活動が活発に行われるのではないか。

授業改善のポイント (イ) 表現の時間の保障

ワークシートには、Aさんのグラフに賛成する生徒は、Bさんのグラフの問題点を指摘して理由を記述する。逆に、Bさんのグラフに賛成する生徒は、Aさんのグラフの問題点を指摘して理由を記述

する。お互いの考えを發表してやりとりしていく中で、最初は「何かおかしいぞ」「うまく説明できないけど、このグラフ違う気がする」といった何気ない一言で構わない。お互いが補いあいながら、徐々にキーワードや大切なポイントがぼんやりとしたものから、くっきりとしてくる。

授業改善のポイント (ウ) 表現の習熟

表現し合うことで学級全体による思考の高まりが行われる。自分の考えを正確に相手に伝えるために、言語の精選や表現の工夫がなされていき、表現に習熟して「根拠を持って表現する力」が育成されていくことを期待する。

授業実践2 (2008年7月3日実施)

【1】対象 川崎市内小学校5年生 (男子15名、女子18名、計33名)

【2】単元名 「小数と整数のかけ算、わり算」(10時間扱い) 本時 (6/10)

時	目標	学習活動	
(1) 小数のかけ算 4時間 上p.18~23			かけ算の段階から表現活動に習熟しておく。既に表現した方法を教室に掲示しておくことで、考え方を利用したり、振り返ることにも役立つ
3	○小数に2位数をかける筆算のしかたを理解し、その計算ができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ 1.8×34 の筆算のしかたを考える。 ・ 1.8×34 の筆算のしかたをまとめる。 ・ 左記の型の計算問題と文章題に取り組む。 	
4	○学習内容を確実に身につける。	<ul style="list-style-type: none"> ・ 「力をつけよう」に取り組む。 	
(2) 小数のわり算 6時間 上p.24~29			
1	○小数を整数でわる計算の意味を理解する。	<ul style="list-style-type: none"> ・ 立式を考える。 ・ $9.6 \div 3$ の計算のしかたを考える。 ・ $9.6 \div 3$ の計算のしかたをまとめる。 	
2 本 時	○小数を1位数でわる筆算のしかたを理解し、その計算ができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ $7.8 \div 3$ の計算のしかたを考える。 ・ $7.8 \div 3$ の筆算のしかたを考える。 ・ $7.8 \div 3$ の筆算のしかたをまとめる。 	
3			

7.80のスープを3つのなべに等分します。何ℓずつに分けられるでしょうか。

【3】題材について

前時では、子どもが扱いやすいように、整数部分、小数部分ともに割り切れる $9.6 \div 3$ でわり算の意味や方法について考えた。本時では、両方とも割り切れない $7.8 \div 3$ を扱い、さらに理解を深めることをねらった。これにより、既習を生かしながらも自分なりに工夫して説明する必要性が生まれ、本研究の授業改善につながると考えた。

授業改善のポイント (イ) 表現する時間の保障 (ウ) 表現の習熟

小数と整数のかけ算から、わり算にかけて、連続した単元の指導計画に、「自分の考えを自分の言葉で表現する」活動を設定した。説明の根拠となるように、言葉や式、数直線、テープ図等を用いて説明する活動を丁寧に行うことで、わかりやすく表現することに習熟してくる。かけ算の学習の段階でわり算にも適用できる考え方がいくつか出てくる。例えば、乗法の導入で0.1をもとに考えることや、位を分けて考えることなど、多くの表現方法が可能である。さらに異なる考え方を交流することで、表現に習熟するだけでなく数学的な考え方も高まり、説明に自信を持つことができる。発表の表現や

形式なども、児童同士が比較・検討していくうちに、整理され洗練された表現になってくる。

授業実践3 (2008年10月21日実施)

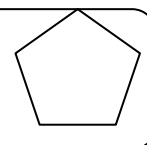
【1】対 象 川崎市内小学校5年生 (男子15名、女子18名、計33名)

【2】単元名 「三角形や四角形の角」(18時間扱い) 本時 (7/18)

【3】題材について

三角形、四角形の内角の和を学習する過程で、求め方が多様であることを知る。さらに同じ考え方を利用して五

課題 五角形の内角の和を調べよう



角形、六角形の内角の和も求めることができる。五角形については、P46図9で示したように、内角の和の求め方が数多くあるため、多様性のある課題であると言ってよいだろう。

授業改善のポイント (ア) 自然と疑問のわき上がる課題

三角形の内角の和で学習した方法をさらに発展させて、四角形、五角形…と自然に連続して考えることができる。分度器による測定や実物の切り分けによる説明も有効である。五角形以上になると補助線による切り分けによる表現が中心となり、その分け方も多様である。子ども同士の情報交換を促すことで、いくつかの切り分け方に気づくうちに、「もっと他にないかなあ。いろいろとやってみよう」という自分の考えを表現したくなる課題。

授業改善のポイント (イ) 表現する時間の保障

目的に応じて適切な表現の方法を選択する力を高めることを期待したい。友達の発表から自分とは違った考え方や求め方に触れ、その考えのよい点、優れた点を共感的に理解しながら、自分の表現を見直したり、より洗練された表現に高めたりしていく。

授業改善のポイント (ウ) 表現の習熟

ワークシートには、5種類の五角形について内角の和を説明する欄を設けた。どんな切り分けを行っても、内角の和が 540° になることを説明できる多様性のある課題であるため、一人の児童がいくつかの表現をすることが可能である。四角形での切り分けの経験を、五角形、六角形へ応用することができ、表現の習熟も期待できる。

III 研究のまとめ

1 研究の成果

授業実践1「底が階段状の水槽」から見てきたこと

子どもたちにとってすぐに答えが予想できてしまう課題では、自然に疑問が湧き上がることはない。この実践授業では、クラス全体での検討からグループでの検討に移った時に、生徒たちが身振り手振りで自分の考えを説明し始めた。この段階では**(b.言語的表現)**が大部分をしめていた。その後、机を動かして、周りに人を集めてノートに自分の考えを書いて説明する**(a 記号的表現)**生徒が増えてきた。ワークシートを配りグラフでの表現を促すと、正しいグラフを予想してかく**(c 図的表現)**活動が活発になってきた。友達と一緒に教室の前に出て、黒板に貼ってある図を使って説明をする**(c 図的表現)**生徒も出てきた。自分の考えを表現したくなる課題の設定という、授業改善のポイント(ア)については実践できたと考えられる。

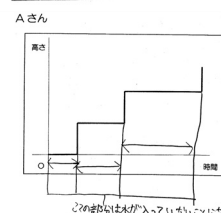
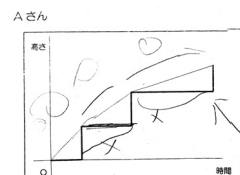


図10 生徒の表現

自分の考えを表現したくなるという動機が生まれるためには、課題に対して自分の考えを持つことが大切である。少し難しく「背伸び」を求められ、既習を使えば解決できそうだと

いう期待感を持たせた課題を設定することで、子どもが自分の考えを持つようになることを意図した。自分の考えを持つことが、子ども同士の意見交換の活発化を促すことになる。

本授業では、グループでの話し合いに入る時、それまでためていた自分の考えを勢いよく吐き出す姿が見られたのは、課題に対して自分の考えを持つことができたと考えられる。また、課題に取り組むにあたって必要な既習事項を丁寧に復習したことも効果的であった。

何となくあいまいでぼやけた自分の考えでも、懸命に表現しながら人とやりとりしていく過程で、少しずつ鮮明でくっきりとした考えに洗練していくことができる。グループでの話し合いの様子から、どちらのグラフも違うらしいというおぼろげな問題意識が芽生え、正しいグラフを見つけてやろうという積極的な授業姿勢につながっていくことができた。

グループで話し合いをしている場面で、正しいグラフを発表するための掲示用プリントに、何度もグラフをかき直している生徒がいた。グラフを使って表現をして、子ども同士でやりとりをしながら予想グラフを修正しているのである。この授業で実践したかった「イ：表現する時間の保障」についても、グループで話し合う時間を保障することで、表現しているグラフがより洗練されていく様子が見られた。

この実践では、生徒が表現したグラフについて、クラス全体で練り上げる時間の保障ができなかった。授業冒頭での課題の把握に時間をかけすぎ、練り上げの時間が足りなかった。また、生徒たちの言葉による表現の中で、この課題の核心にせまる言葉である「区切れればいい」という発言が出たが、このキーワードをクラス全体で取り上げて、課題を「区切りごとの、大きさの違う直方体への注水」という課題へと還元できれば、全体での練り上げにつなげることができたであろう。

授業実践2「小数のわりざん」から見えてきたこと

前時の学習 $9.6 \div 3$ では、9も0.6も3で割ることができるため、子どもたちはすぐに答えを予想することができた。理由の説明には次のようなものがあった。

- (1) 9.6を9と0.6に分けて、それぞれを3で割る。そして、最後に足し合わせて $3 + 0.2 = 3.2$ (a 記号的表現 b 言語的表現)
- (2) 割られる数に10をかけて、 $96 \div 3 = 32$ この答えを10で割って $32 \div 10 = 3.2$ (a 記号的表現 b 言語的表現)
- (3) 9.6を0.1が96個あると考えてから計算する。 $96 \div 3 = 32$ $0.1 \times 32 = 3.2$ (a 記号的表現 b 言語的表現)
- (4) 数直線や線分図を用いて説明する。(a 記号的表現 c 図的表現)

これらの考え方が出てきた背景には、前単元の学習である「小数のかけ算」の学習の時に学んだことを活用することにすぐに気がついた子どもが多かったことが挙げられる。そのとき、上記(1)~(4)の方法で説明する学習活動を丁寧に行っていたために、既習事項を利用することに自然と気がついたようだ。さらに、小学校3年の段階で、 23×3 を 20×3 と 3×3 に分けたり、 240×3 を10でわって 24×3 を計算してから、10倍したり、という学習をする。そうした積み上げがあるからこそ、子どもたちから多様な説明が出てくる。自分の方法で課題を解決しながらその説明を発表用の画用紙にかく。言葉や数、式、テープ図など、表現方法に工夫をこらしながら画用紙を完成させていく際に、表現方法として(a 記号的表現)、(b 言語的表現)、(c 図的表現)が用いられている。

表3 かけ算からわり算へ、共通の考えを用いて表現する

単元	問題	整数部分と小数部分に分けてから計算	10倍してから計算	0.1がいくつ分から計算
かけ算	1.5×5	1×5 0.5×5 $5 + 2.5 = 7.5$	$1.5 \times 10 = 15$ 15×5 $75 \div 10 = 7.5$	1.5は0.1が15個ぶん 0.1が75個ぶんは7.5
わり算	$9.6 \div 3$	$9 \div 3$ $0.6 \div 3$ $3 + 0.2 = 3.2$	$9.6 \times 10 = 96$ $96 \div 3$ $32 \div 10 = 3.2$	9.6は0.1が96個ぶん 0.1が32個ぶんは3.2
	$7.8 \div 3$	$7 \div 3$ $0.8 \div 3$ $?? ??$	$78 \div 3 = 26$ $26 \div 10 = 2.6$	7.8は0.1が78個ぶん、0.1が26個ぶんで2.6

本時の課題である $7.8 \div 3$ のわり算では、予想どおり既習の方法が使えなくて戸惑う子どもが出てきた。(1)の方法を使って、整数部分と小数部分に分け、 $7 \div 3$ 、 $0.8 \div 3$ を計算していくのだが、「あまり」の処理に戸惑っていた。適度に「背伸び」をした課題を設定することで、「どうやってやればいいのだろう」という自然な疑問がわきあがってくる。課題の解決方法がわからず、どうやっていいのか手が止まっている子どもには、机間指導をしながら教師が支援をしたり、近くの子どもたち同士でのやりとりを促したりした。その後、教師がいったん個人での追求を止めて、疑問点をクラス全体の共通の課題としてとりあげて、意見交換する場面を設定した。解決のヒントにつながる言葉や意見が発表され、クラス全体で考えを練り上げることができた。

授業実践3 「五角形の内角の和」から見てきたこと

三角形や四角形の内角の和を求める場面では、分度器での測定や紙を切り抜き（d 操作的表現）、実物を敷き詰める（e 現実的表現）ことで、その内角の和が 180° 、 360° であることを示すことができる。

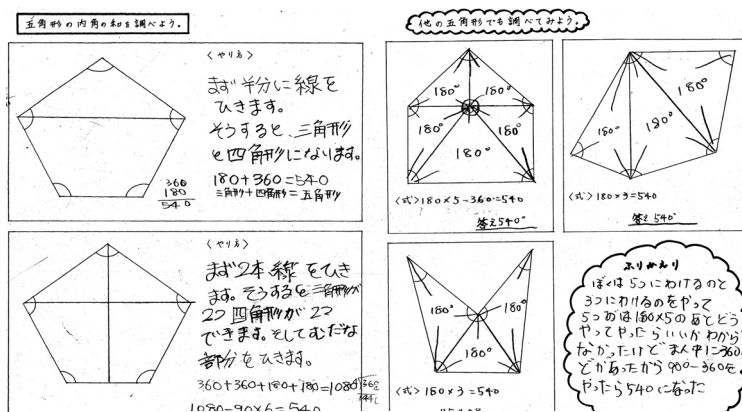


図 11 多様な切り分け（図的表現）

そうした表現も重要であるが、内角の和の求め方の一般化へつなげていくためには、補助線による分割に注目する必要がある五角形以上の多角形の内角の和をぜひ扱いたい。五角形でも分度器を用いて内角の和を測定している子どももいたが、測定誤差が避けられず、正確に角度を求めることができていなかった。e 現実的表現の限界がみえた時、別の表現に柔軟に切り替えるためにも、多様な表現様式に触れておく

必要がある。そうした経験を重ねることによって、式や概念を使った(a 記号的表現)や(c 図的表現)の必要性を実感することができる。四角形の内角の和の学習で、既習の図形への切り分け(c 図的表現)を経験しているため、同様の方法で求めている子どもも多かった。

多様な切り分け方が可能で、どのやり方でも正しく求めることができるが、練り上げの段階でよりよい説明に整理するための観点をはっきりさせる工夫が必要である。多様な説明方法の中から「かんたん」「べんり」「はやくできる」「わかりやすい」「きれい」など、その考えがよい理由を子どもの言葉(b 言語的表現)で明確にしていく。自然に「簡潔・明瞭・的確」といった数学的な価値に気づいていく。しかし、簡潔、明瞭でなくても図 12 のようにまったく違ったアプローチで求めた方法にも「おもしろい」「すごい」「自分には思いもよらなかった」といった言葉が子どもから出てきた。そうした声はぜひ大切にしたい。子どもたちは「独創性」という価値にも自然と気がついている。そして、違った方法がまた別の課題を解決するときに役立つ可能性があることも指摘しておきたい。

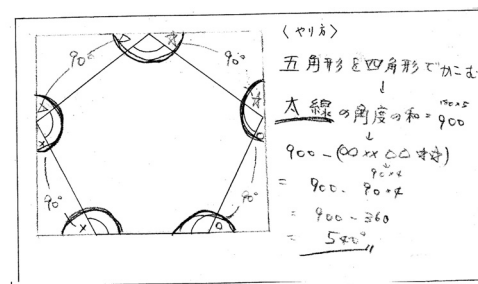


図 12 補助線を使わない方法も

2 研究を通して見えてきたこと

(1) 課題設定の工夫

数・記号・式・図・グラフ等の数学的な表現を使ってやりとりをする活動が、教師と子どもとの間だけでなく、子ども同士でも行われることで、算数・数学に関する知識や技能の習得や思考力の高ま

りにつながっていく。そうした活動を促す課題にするには、次の①～③を意識して、課題に一工夫を加えると効果的である。

課題の一工夫

- ①「直感的に感じたこととは何か違うぞ」という違和感を感じる課題→表現への動機づけにつながる
例：授業実践1 底が階段状の水槽
- ②「既習が使えるぞ」という課題→積極的な表現姿勢へつながる
例：授業実践2 小数の割り算
- ③解決方法がいくつもある課題→表現するおもしろさを感じる
例：授業実践3 五角形の内角の和

(2)「間違っている」ことを説明する

実践授業1「底が階段状の水槽」では、「グラフはどうなるか」という問いかけではなく、あえて間違ったグラフを示して「どちらが正しいか」とした。子どもたちは直感的にグラフが間違っているのではないかと疑問を持ち、もやもやとした違和感を感じる。それが、正しいグラフはどうなるのかと考える動機になり、積極的なやりとりや表現へとつながった。

正しいことを説明するには、筋道を立てた正確な説明が必要である。帰納・演繹・類推などの手法で相手に納得してもらうための説明をするが、その難易度は比較的高い。しかし、間違っていることを説明するのは、「おかしいな」と感じる部分を指摘するだけでも可能である。実践授業1において、「Aさんのグラフは水平になっている部分があるのでおかしい」と指摘できる子どもが多かった。正しいグラフはどうなるのかわからなくても、間違っていることは説明できるのである。説明のし易い課題設定に直して、取組の壁をできるだけ低くすることが、積極的に表現する姿勢につながるのではないだろうか。

(3) 活発な表現活動を支える発問

活発な表現活動を支える発問として有効だった発問として、次の3つがあげられる。

○見通し「～何が分かればよいのだろう」「～まずは何をを見つけようか」

○差異や類似「～これらの考え方に共通していることは何だろう」「～これらの考え方の違いは何だろう」

○分類「～これらの考えを大きく分けるといくつに分けられるだろう、また、分ける理由は何だろう」

「共通していることは何だろう」という発問によって、子どもは異なる考え方の中の共通な事柄を見つける視点をもつ。そのことによって、次に話し合いたい内容を、子どもの方から引き出すことができた。その場合に意識する視点として以下の5つの点を大切にする必要がある。

- 教師は子ども同士の考えをつなぐ役割を意識する
- 子どもが話す時間を十分に保障する
- 子どもにはキーワードをおさえた発言を意識させる
- 答えが1つで満足せず、他にないかと考えさせる
- ある子どもの考えを、違う子どもに説明させる

はじめのうちは不十分な表現でも、他人とやりとりしていく過程で少しずつ鮮明でくっきりとした表現に洗練されていく。よけいな言葉や表現をそぎ落として、必要なキーワードを押さえた、簡潔で確かな表現にしていくことで、学級全体の知的なコミュニケーションが行われ、「表現」の質的な高まりが期待できる。

3 表現する力を育てる授業の提案と今後の課題

自分の考えを数学的な表現を用いて説明する力は、今後様々な場面で必要になると考えられる。本研究での3つの授業実践では、実践例としては少なく、子どもたちに表現する力がついたかどうかはわからない。しかし、こうした実践例を積み重ね、教材や単元構成、授業展開を工夫・改善していくことで、子どもたちの表現する力が育成できると期待している。

最後に、研究を進めるに当たり、ご協力いただいた先生、ご支援ご助言をくださった先生方、また校長先生をはじめ学校教職員の皆様に、心より感謝し厚く御礼申し上げます。

【参考文献】

- | | |
|---|-------|
| 『Mathematical Connections』 McDougal Littell | 1995年 |
| 『ALGEBRA』 Scott Foresman | 1995年 |
| 『Geometry』 Houghton Mifflin | 1996年 |
| 『静岡大学教育学部研究報告 第27号』 静岡大学 | 1996年 |
| 『児童生徒の算数・数学と社会をつなげる力に関する発達的研究』 国立教育政策研究所 | 2001年 |
| 中原忠男編『算数・数学科 重要用語 300 の基礎知識』 明治図書 | 2002年 |
| 『学芸大数学教育研究 14号』 東京学芸大学数学科教育学研究室 | 2002年 |
| 『学芸大数学教育研究 15号』 東京学芸大学数学科教育学研究室 | 2003年 |
| 『OECD 生徒の学習到達度調査(PISA)2003年調査報告書』 国立教育政策研究所 | 2004年 |
| 清水静海『図でみる日本の算数・数学授業研究』 明治図書 | 2005年 |
| 『日本の数学的リテラシーの課題』 Benesse 教育研究開発センター | 2007年 |
| 『教科日本語 表現』 世田谷区教育委員会 | 2007年 |
| 新井紀子『生き抜くための数学入門』 理論社 | 2007年 |
| 安彦忠彦『中学校新教育課程 教科領域の改訂・解説』 明治図書 | 2007年 |
| 『小学校学習指導要領解説—算数編—』 文部科学省 | 2008年 |
| 『中学校学習指導要領解説—数学編—』 文部科学省 | 2008年 |
| 『特定の課題に関する調査』 文部科学省国立教育政策研究所 | 2008年 |
| 『北海道教育大学附属旭川中学校 研究紀要』 旭川中学校 | 2008年 |
| 『学芸大数学教育研究 20号』 東京学芸大学数学科教育学研究室 | 2008年 |

【指導助言者】

- | | |
|---------------------------------|-------|
| 北海道教育大学教授 | 相馬 一彦 |
| 北海道教育大学教授 | 久保 良宏 |
| 横浜国立大学准教授 | 池田 敏和 |
| 臨床教育研究所わいわい所長 | 馬場 英顯 |
| 川崎市立小学校算数教育研究会長（川崎市立梶ヶ谷小学校長） | 森 政利 |
| 川崎市立小学校算数教育研究会副会長（川崎市立京町小学校長） | 加藤 彰 |
| 川崎市立中学校教育研究会数学科部会長（川崎市立金程中学校長） | 前田 高幸 |
| 川崎市立中学校教育研究会数学科副部会長（川崎市立大師中学校長） | 杉田 修二 |
| 川崎市総合教育センター指導主事 | 榎原 真也 |