確かな知識を身に付けるための指導に関する研究

―― 「比べる」「想起する」学習場面を通して ――

算数･数学科研究会議

堀江　賢司[1]　　村木　涼子[2]　　向井　たか子[3]　　梶　秀紀[4]

要　　約

算数･数学の公式や定理はただ覚えればよいのだろうか。公式や定理は、それらが導かれる過程が理解できていたり具体的な場面で使えたりしてこそ、確かな知識として身に付いたといえるのではないかと考える。

評価方法等の工夫改善のための参考資料では、数量や図形などについての知識･理解について、「用語や記号の意味などについての知識だけでなく、問題を解決する手順や方法などについての知識も評価の対象であることに配慮する必要がある。」と述べられている。

算数や数学の確かな知識を身に付けるためには、その知識が導かれる過程、すなわち手順や方法などを考える指導が重要になってくる。それでは、手順や方法などを理解する授業とはどのようなものだろうか。

本研究では、子どもたちが確かな知識を身に付けるために、手順や方法などを比べるという学習活動と、学習した知識を使ったという実感をもたせるために、一度学習した内容を想起する学習活動を授業の中に取り入れることにした。

このような「比べる」「想起する」という学習活動を通して、身に付けた知識が形式的に覚えただけの知識ではなく、意味をとらえ納得できるような知識になると考えられる。また、生活や学習の場面で目的に応じて適切に使っていけるような確かな知識となるとも考えられる。

キーワード：確かな知識、手順や方法などを考える、知識を使った

目　　次

Ⅰ　主題設定の理由
　1 現状における問題点････････････････････46
　　(1) 日頃の授業から････････････････････46
　　(2) 知識･理解の評価問題から･･････････47
　　(3) 学習指導要領から･･････････････････48
　2 研究主題の設定･･････････････････････48
　　(1) 日頃の授業改善････････････････････48
　　(2) 確かな知識･････････････････････････48
　　(3) 主題の設定･････････････････････････49
　　(4) 研究仮説･･･････････････････････････49
Ⅱ　研究の内容
　1 確かな知識が身に付いているとは･･････49
　　(1) 確かな知識についての例
　　　　－中学２年生＜証明の学習＞の例－･･･50
　　(2) 確かな知識についての例
　　　　－小学６年生＜速さの学習＞の例－･･･51
　2 指導のあり方について･････････････････51
　　(1) 手順や方法を比べる････････････････51
　　(2) 一度学習した内容を想起する･･･････52
　3 検証授業･････････････････････････････52
　　検証授業１･･･････････････････････････52
　　検証授業２･･･････････････････････････54
　　検証授業３･･･････････････････････････56
　　検証授業４･･･････････････････････････57
Ⅲ　研究のまとめ
　1 研究を通して見えてきたこと･･････････59
　　(1) 二つの側面とは･････････････････････59
　　(2) それぞれの側面に適した指導とは
　　　　････････････････････59
　2 おわりに･････････････････････････････60

参考文献････････････････････････････････60
指導助言者･･････････････････････････････60

[1]川崎市立はるひ野中学校教諭(長期研究員)
[2]川崎市立東高津中学校教諭　(研究員)
[3]川崎市立富士見台小学校教諭(研究員)
[4]川崎市立大戸小学校教諭　　(研究員)

Ⅰ　主題設定の理由

1　現状における問題点

（1）日頃の授業から

授業中の子どもたちの様子から、解き方は知っているが、なぜその解き方でよいのかは、十分に理解していない様子が見受けられることがある。例えば、次の①～④のような場合である。

①計算はできるが、なぜそのやり方でよいのか分かっていない。

例）２８５÷３　の計算

```
     ９５
３）２８５
　　２７
　　　１５
　　　１５
　　　　０
```

なぜ　２８÷３　をするのか…？

なぜ　５　が下りてくるのか…？

②公式は知っているが、その意味を実際の場面にあてはめて理解していない。

例）「速さ＝道のり÷時間」という公式を知っていて、これを使って速さを求めることもできる。しかし、速さは単位時間当たりに移動できる道のりであるという意味、この公式から道のりや時間も求めることができるよさや、実際の場面では、どんな場面で使えるものなのかということまでは分かっていない。

速さを求められると何が便利なのか…？

③連立二元一次方程式を解くことはできるが、解の意味を理解していない。

例）次のような問題を解決するために、連立方程式を解く方法しか思い浮かばない。

> 次の連立方程式の解であるものを下の①～④から探します。その方法を２つ答えなさい。
>
> $$\begin{cases} x+5y=3 \\ 3x-2y=-8 \end{cases}$$
>
> 計算して連立方程式を解く方法はわかる。もうひとつの方法は…？
>
> ①　x＝２，y＝７　　②　x＝８，y＝－１　　③　x＝－２，y＝１　　④　x＝４，y＝－２

連立二元一次方程式の解とは、その両方の方程式を同時に満たす値の組のことである、ということを理解していれば、選択肢の解を代入し、等号が成立するかどうかで確かめられる。しかし、解についての理解が足りないと、加減法など、計算して解を求める方法しか気付かない。①～④を選ぶことはできるが、連立方程式の解の理解としては不十分である。

④合同条件は知っているが、そのよさはどんなところにあるのかは分かっていない。

例）
- ３組の辺がそれぞれ等しい三角形は合同である。
- ２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい三角形は合同である。
- １組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい三角形は合同である。

この条件を言うことはできる。しかし、この三つの合同条件のよさは分からない。二つの三角形が合同であるかどうかの確認をするときに、３組の辺と３組の角、その全てが重ね合わさることを確認する必要がないことや、この条件に出てくる辺の長さや角の大きさが決まったならばただ一つの三角形しか作図できないということまでは理解していない。

三角形の合同条件は、何のためにあるのだろうか…？知っていると何が便利…？

①では、計算の方法を覚えるだけでなく、なぜそのやり方が正しいのかを知っていること、②では、公式を覚えるだけでなく、実際の場面にあてはめて意味を理解していること、③では、求め方を覚える

だけでなく解の意味を理解していること、④では、証明のために必要だから覚えるだけでなく、合同条件そのもののよさを知っていることが必要である。このように「知識を身に付ける」とは、形式的に覚えるのではなく、なぜそのやり方でよいのかということや、どんな意味があるのかも理解することである。それとともに、目的に応じて適切に使っていくことでもある。

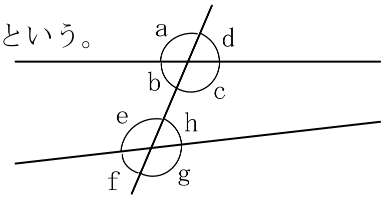
（２）知識･理解の評価問題から

学習評価の観点の一つである「数量や図形などについての知識･理解」の評価に際して、これまで、次のような問題を扱うことが多かった。

・０より大きい数を $\boxed{}$ の数、０より小さい数を $\boxed{}$ の数という。

・右の図で、∠b の錯角は∠ $\boxed{}$ である。

・４つの角が等しい四角形を $\boxed{}$ という。



このような、言葉の意味を覚えておけば答えられる問題である。

国立教育政策研究所が提示している、評価方法等の工夫改善のための参考資料（以下、参考資料）では、各観点の特性への配慮として、数量や図形などについての知識･理解については、「用語や記号の意味などについての知識だけでなく、問題を解決する手順や方法などについての知識も評価の対象であることに配慮する必要がある。」としている。また、この観点の評価のための小テストの例として次のような問題を示している。

次の(1)、(2)の各問に答えなさい。

(1) 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を求めるために、右のように式の変形をしました。

形式的に覚える知識

① $\boxed{}$ に当てはまる式を答えなさい。

②☆印のように変形するときに基になっている考え方はア～ウの中のどれですか。一つ選び記号で答えなさい。

手順や方法などについての知識

ア　因数分解する。

イ　平方の形に変形する。

ウ　移項をする。

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\left.\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x&=-\frac{c}{a} \\ x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2&=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \end{aligned}\right\}☆$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\boxed{}$$

(2) 右のようにして、$3x^2-6x+2=0$ を二次方程式の解の公式を用いて解こうとしましたが、解き方に誤りがあります。どこに誤りがあるのか説明しなさい。

身に付けた知識を使う

二次方程式 $3x^2-6x+2=0$ に解の公式を用いると、

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times3\times2}}{2\times3}$$
$$=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{6}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$$

このように、手順や方法についても正しく答えられることが、知識･理解の評価問題には求められている。

（３）学習指導要領から

平成 20 年１月中央教育審議会答申では、算数科、数学科についての課題を踏まえた上で改善の基本方針が示されている。学習指導要領では、国内での教育課程実施状況調査や国際的な学力調査の結果から導かれた課題として、次のようなものがあるとされている。

・基礎的な計算技能の定着については低下傾向はみられなかったが、計算の意味を理解することに課題が見られた。

・身に付けた知識･技能を実生活や学習等で活用することが十分にできていない。[1)]

この課題に当たる例を、**１－（１）**で挙げた問題点でいえば、①や③は意味を理解すること、②や④は知識を学習等で活用することへの課題の例といえる。

本研究会議でも、日頃の授業ではこの２点について同様の状況があることが話し合われた。例えば、分数について計算方法は知っている子どもが多いものの、なぜその方法でよいのかを理解しないままに計算練習をしていることがよくある。例えば 1/2 ＋ 1/3 の計算はできるが、それが数量としてどんな意味をもっているのかを理解していない、また、通分することが、既習である分母が揃っているときのたし算を使っているのだということに気付いていない、といったことが挙げられる。日頃の授業を行う中で私たちが実感している課題ともいえる。

２　研究主題の設定

（１）日頃の授業改善

１では、日頃感じている問題点を挙げてきた。その内容を簡単にまとめると、次のような三つの問題点にまとめられる。

①知識が意味の理解を伴っていない形式的に覚えたものになっている。

②知識が学習に十分活用できていない。

③評価問題は、覚えたことを答えるだけの問題になっている。

このうち③については、子どもたちを直接指導する際の問題点というより、評価問題作成上の問題点である。そこで、本研究では、①、②に注目し、意味の理解を伴った知識を身に付けていけるような授業を、また、身に付けた知識が他の学習場面でも使われていることが実感できる授業にしたいと考えた。

（２）確かな知識

中学校学習指導要領解説数学編（p．16）では、数学科の目標の「数量や図形などに関する基礎的な概念や原理･法則についての理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し」[2)] という内容に対する記述に、次のような二つのことが大切であると示されている。

・基礎的･基本的な内容の重視とともに、“なぜそのようなやり方でよいのか”や“どんな意味があるのか”といったことの理解に裏付けられた確かな知識を習得するようにすること。

・確かな知識が、日常生活や社会における事象を数学的に表現･処理して、問題を解決することに役立てられるようにすること。

また、**Ⅰ－１－（２）**で述べた参考資料の記述から、確かな知識の習得には、問題を解決する手順や方法などについての理解が重要だと考える。

[1)] 文部科学省『中学校学習指導要領解説 数学編』 教育出版　2008 年　p. 4

[2)] 文部科学省『中学校学習指導要領解説 数学編』 教育出版　2008 年　p. 14

さらに、小学校学習指導要領算数編でも、「知識及び技能を身に付けるとは、数量や図形の意味をとらえ、納得できるようにすることであり、また、生活や学習の場面で目的に応じて適切に使っていけるように身に付けることである。」[3] とある。やはり、身に付けた知識の意味を理解することと、使っていけることの大切さが述べられている。

これらを踏まえ、本研究では「確かな知識」というものを、次のようなものであると考えて研究を進めていく。

― 確かな知識 ―

・問題を解決する手順や方法などについての理解を伴った知識。
・学習の場面で目的に応じて適切に使っていける知識。

（３）主題の設定

本研究では、「確かな知識」を身に付けるための指導の在り方について研究をしていこうと考え、研究主題を次のように設定した。

研究主題　　確かな知識を身に付けるための指導に関する研究

（４）研究仮説

以上のことを踏まえ、次のような仮説を設定した。

手順や方法を比べる学習場面、一度学習した内容を想起する学習場面を設定することで、子どもたちは主体的に確かな知識を身に付けるための学習を進めることができる。

この仮説の検証に向けて、授業では、形式的に覚えようとするのではなく、問題を解決する手順や方法などの理解を伴って知識を身に付け、また、知識を目的に応じて適切に使っていける子どもたちの様子を見ていく。手順や方法を理解するために「比べる」学習場面、知識を使っている実感をもつために一度学習した内容を「想起する」学習場面が大切であると考え、副主題を次のように設定した。

副主題　　「比べる」「想起する」学習場面を通して

Ⅱ　研究の内容

１　確かな知識が身に付いているとは

「確かな知識」が身に付いているとはどういうことか、考えておきたい。これまで述べてきたように、問題を解決する手順や方法などについて理解していること、一度学習した内容を目的に応じて適切に使っていけることを、確かな知識が身に付いているととらえることにする。

確かな知識が身に付いているということについて、例を挙げながら説明したい。問題を解決する手順や方法などの理解をしていること、一度学習した内容を目的に応じて適切に使っていけることについて、具体的な授業においてどのような思考ができることかを考える。一つ目は中学校の「証明」の学習について、二つ目は小学校の「速さ」の学習について、どんなことを理解してほしいのか、この授業ではどんなことを使って理解していけることが大切なのか、確かな知識を身に付けたといえるためにはどんな姿をめざすのかを説明する。

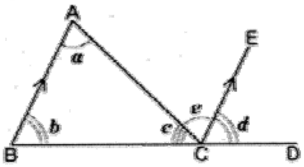
[3] 文部科学省『小学校学習指導要領解説 算数編』 東洋館出版社　2008 年　p. 19-20

（１）確かな知識についての例－中学２年生＜証明の学習＞の例－

ある学級で，「三角形の内角の和は 180°である」ことの証明について，次の①，②を比べて考えています。

①

下の図の△ABC で，
辺 BC を延長した直線上の点をＤとし，点Ｃを通り辺 BA に平行な直線 CE をひく。



平行線の錯角は等しいから，　$\angle a = \angle e$
平行線の同位角は等しいから，　$\angle b = \angle d$
したがって，

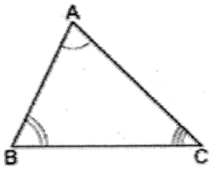
$$\angle a + \angle b + \angle c = \angle e + \angle d + \angle c = 180°$$

よって，三角形の内角の和は 180°である。

②

下の図の△ABC で，
３つの角の大きさをそれぞれ測ると，

$\angle A = 72°$
$\angle B = 64°$
$\angle C = 44°$



したがって，

$$\angle A + \angle B + \angle C = 72° + 64° + 44° = 180°$$

よって，三角形の内角の和は 180°である。

どんな三角形でも内角の和は 180°であることの証明について，下のアからオまでの中から正しいものを１つ選びなさい。

ア　①も②も証明できている。

イ　①は証明できており，②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

ウ　①は証明できているが，②は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめても証明したことにはならない。

エ　①も②も形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになる。

オ　①は形の違うたくさんの三角形で同じように確かめれば証明したことになるが，②はそれでも証明したことにはならない。

図１　平成 21 年度全国学力･学習状況調査問題Ａ$\boxed{8}$

①手順や方法を理解する

平成 21 年度全国学力･学習状況調査の問題である。これと同様の課題を授業で扱うと、演繹的に説明されたものと、実測で帰納的に説明されたものを比べることで、それぞれのよさを考えることができ、証明の意義が理解できる。小学校では実測などの作業を大切にして、図形の性質を帰納的に説明する学習を多くしてきたが、中学校では演繹的に説明し、証明は例外なく認められるものでなければならないことを理解していく。

②目的に応じて適切に使っていける

以前に一度学習した内容で、例えば「対頂角は等しい」となぜいえるのかを考えたとき、どんな対頂角の場合でも等しくなることを説明する必要があった。「三角形の内角の和が 180°である」ことを証明する学習を通して、対頂角の学習を使ったという実感をもたせたい。

また、以上のような学習活動を経ることで、次に他の定理を証明する際にも、この課題のことを想起できれば、演繹的に説明しようとするはずである。例えば「二等辺三角形の二つの底角は等しい」という定理について、小学校３年生ですでに学習をしているが、そのときは、実際に折って重ねることで等しいことを確認しただけで、例外なく成立するとまではいえなかった。どんな二等辺三角形についても成立する性質だと示すために、証明することが必要だと感じてほしいところである。

（２）確かな知識についての例－小学６年生<速さの学習>の例－

速さについて、市内で使われている教科書には下の図２のような課題が載せられている。

右の表は、みかさんたちが家から公園へ行ったときの、道のりとかかった時間を表しています。

だれがいちばん速く走ったでしょうか。

公園までの道のりと時間

	道のり(km)	時間(分)
みか	1.2	6
えり	1.5	6
ゆうた	1.2	5

図２　教育出版教科書『小学算数６上』P.87 より

①手順や方法を理解する

みかさんとえりさん、みかさんとゆうたさんのように、時間または道のりを揃えて速さを比較する考え方と、３人とも１分あたりまたは１km 当たりに揃えて比較する考え方とを、比べて考えることで、それぞれの比較の方法のよさを理解する。また、その中で、いろいろなものの速さを一般的に表すには、「単位量当たりの大きさ」の考えが便利であることを理解する。

②目的に応じて適切に使っていける

進んだ道のりやかかった時間が揃っていない場合には、全てを１分当たりや１km 当たりに揃えておくと便利である。このことに気付いたとき、５年生で一度学習した「単位量当たりの大きさ」を想起できたといえるだろう。「単位量当たりの大きさ」では、広さも乗っている人数も違うエレベーターの混み具合を比較した。そのときの状況と、今回の道のりも時間も違うえりさんとゆうたさんの速さを比較する状況は同じだと分かれば、「単位量当たりの大きさ」の内容を使えることを実感できる。

また、次の学習として「道のり＝速さ×時間」という、道のりの求め方を考える授業では、速さが単位時間当たりに進む道のりだということが分かれば、“速さに時間をかける”という考え方に結びつくだろう。

２　指導の在り方について

確かな知識を身に付ける指導として、どんな授業を行うのかを考えたい。子どもたちが問題を解決する手順や方法などを理解し、身に付けた知識を適切に使うことのできるような指導の工夫について、**Ⅱ－１**の例について具体的に考える。

（１）手順や方法を比べる

「手順や方法を比べる」という学習活動を、授業の中で取り入れた。「比べる」学習活動の中で、よさを考えたり理由を考えたりして、手順や方法を理解できるようにする。また、受動的に覚えようとするのではなく、比べたものにどんな違いがあるのか、主体的に考える活動になるような工夫もする。

例えば、**Ⅱ－１－（１）**の証明の例でいえば、演繹的に説明されたものと、実測で帰納的に説明されたものの二つを比べる。二種類の説明方法を見比べたときに、

ア　二つの説明の違いはどんなところにありますか。

イ　それぞれのよさはどんなところにありますか。

ウ　どんな三角形の内角の和でも 180°だといえる証明はどんな証明でしょうか。

といった発問をしていく。アの発問だけで子どもたちが自発的に思考を進められれば、イやウの発問はしない。比べることで、演繹的な証明のよさに気付き、証明がどのような手順で行われるのかを理解させるようにする。

（２）一度学習した内容を想起する

以前に一度学習した内容を「想起する」学習活動を設定することで、知識を使っている実感をもてるようにしたい。自発的に必要な内容を想起できることが望ましいが、それができるのは、一部の子どもだけかもしれない。そこで、より多くの子どもにも想起させるため、教師側が工夫して発問をしていく。

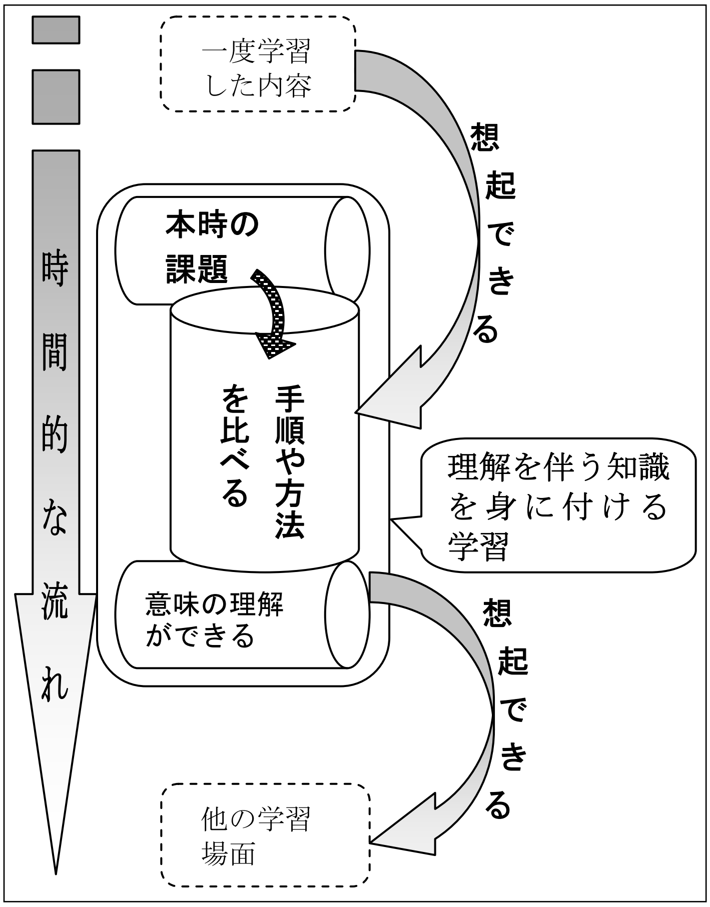
Ⅱ－１－（２）の“速さ”の例では、

ア　（１分当たり、1㎞あたりの考え方を指して）このような考え方は以前にも学習したことはありませんか。

イ　「当たりの」という言葉を、使ったことはありませんか。

ウ　「単位量当たりの大きさ」の考えは、どんなときに使ったか覚えていますか。

エ　エレベーターの混雑具合の話で学習したのを覚えていますか。



と、発問する。

手順や方法を比べるときの発問と同様に、できればイ、ウ、エは投げかけないようにする。子どもが想起できないようであれば、必要に応じて徐々に投げかけていく。想起させることで、エレベーターの混雑具合を比較したときに広さも乗っている人数も違っていたのと同じだ、と感じさせ、一度学習した内容を使っている実感をもたせたい。

３　検証授業

研究仮説を検証するため、以下の授業を行った。

検証授業１（小学校３年生「割り算」）　　（実施日：2011.6.10）

［１］「比べる」学習活動までの流れ

（ⅰ）　全部で 18 個のあめ玉があります。１袋に６個ずつ入れていくと、何袋できますか。

（ⅱ）　実際に取り分ける作業をしてみると、３袋できる。

→このようなとき　18÷６＝３　と表す。　　＜ここまで前時＞

（ⅲ）　上の（ⅰ）について、18÷６の計算結果を求めるために、いろいろな図をかいてみる。

（ⅳ）　かいた図を見てみると、６×３＝18 というかけ算の式もふさわしいように見える。

（ⅴ）　二つの式「18÷６＝３」と「６×３＝18」、なぜ二つ出てきてしまう？

［２］想起させたい学習

ここでは、小学校２年生で学習した「かけ算」の内容を想起させたい。２年生では「同じ数ずつのまとまりがいくつかあるときは、かけ算の式に表すことができる。」と学習してきている。「○個のまとまりが△個あるときは、○×△で表す。」という、かけ算が使われる場面を想起させて、本時の割り算の理解に生かせるようにしたい。

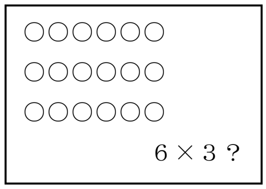
［３］「かけ算」と本時「割り算」の関係

18 個のあめ玉を袋に入れていくとき、６個のまとまりが３袋できる。よって、ここには６×３＝18 というかけ算の式が成り立つ。しかし、本時の前の授業では、18 個を６個ずつ分けていくと三つに分けられる、このことを「18÷６＝３」と表すことを学習している。この「18÷６＝３」をかけ算の式を用いて説明すると、「６×□＝18 の□を求めるのが、18÷６という式である。」といえる。本時で考えている割り算の場面が、６×$\boxed{3}$＝18 というかけ算の式で表せることを理解し、同時にそれは、除法が乗法の逆算であることの理解につながっていくものである。

［４］授業のねらいと検証

①手順や方法を比べる

あめ玉を分けていく場面を、わり算の式でとらえる考え方と、かけ算の式でとらえる考え方を比べた。上記の**［１］**－(ⅲ)の活動で、子どもがかいた図で右のようなものがあった。この図をかいた子どもは「６×３？」とかき残した。これをクラス全体で取り上げた。



比べることで、あめ玉を分ける場面が「割り算」の式で表すことを形式的に覚えるだけではなく、「18÷６＝３」と「６×３＝18」の関係をよく考えることはできたといえる。

②一度学習した内容を想起する

“６×３”という式が出てきたのはなぜか、と考えているとき、「１袋にあめ玉が６個ずつあって、それが３袋あるから“６×３”になる。」という発言があった。「○が△個ある→○×△」というかけ算の学習を想起できた場面だと考えられる。

また、教師が誘導する形ではあったが、授業の後半では右の**図４**を扱い、この図からも、６個のまとまりが３袋あるから“６×３”になるという発言があった。これも、かけ算の学習を想起できた場面といえる。

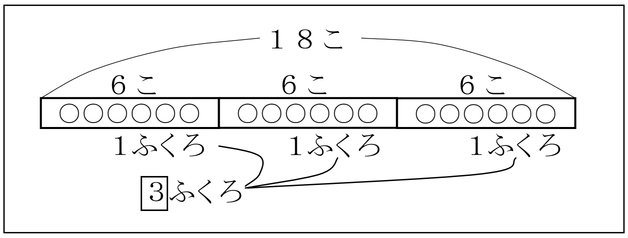


図４

［５］考察

①求めたいものが＝の左側にくることと□を含んだ式を扱うことの難しさ

多くの子どもたちにとっては“求めたいものは＝の右側にくる”という考えが強くあったようで、“６×３＝18”という式は求めたいもの“３”が＝の左側にあり、抵抗があったようだ。しかし、場面を式に表してみると、この式も正しいように見える。この点に苦しんでいた。我々教師としては、いろいろと思考していくうちに、乗法と除法が逆算の関係にあることに気付き、“６×□＝18”の□を求めるのが“18÷６”だ、と考えられるように指導したかった。ところが、これまでの学習状況として、まだ□を含んでいる式を扱うことに慣れておらず難しかった。

②“18÷６＝□”と“６×□＝18”の逆算の関係

そんな中でも「(かけ算の式も) 考え方としてはあってる。」「(かけ算、割り算、どちらの式がよいかを考える場面で) どちらが正解というのはない。」という発言もあった。これは“18÷６＝□”という式と“６×□＝18”という式が逆算の関係として同時に成立することに気付いたものとも考えられる。

次のような発言をした子どももいた。「“18 個のあめ玉を、１袋６個ずつに分けていくと３袋できた。”この文章は、18÷６＝３という割り算の式の場面。しかし、その文章を**図４**のように改めて表して、これを見ていると“６×３＝18”という式が出てきた。だからどちらの式も同じものだと思う。」これも“18÷６＝□”と“６×□＝18”が同時に成立し、逆算の関係にあることに気付いていたといえる。

③視点の明確化が不十分であったこと

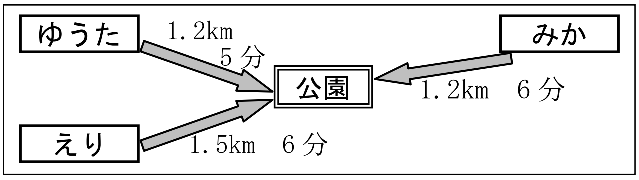
本時の指導を行った時点では、研究の構想を構築している最中であったため、「比べる」「想起する」学習活動を明確に意識して行うことができなかった。教師側の発問として、「比べる」場面では、「“18÷６＝３”と“６×３＝18”二通りの考えが出ました。なぜですか。」「この二つの式にはどんな違いがありますか。」「この場面は“６×３＝18”という式で表すことができますか。」などの発問、「想起する」場面では、「かけ算はどんなときに使うと勉強しましたか。」「“６×３＝18”を言葉の式や図で表すとどうなりますか。」などの発問を順にする中での子どもの様子を検証できるとよかった。

検証授業２（小学校６年生「速さ」）　（実施日：2011.9.30，10.3）

［１］「比べる」学習活動までの流れ

（ⅰ）　「速さ」と「早さ」の違い確認。＜前時＞

（ⅱ）　右の図は、みかさんたちが家から公園へ行ったときの、道のりとかかった時間を表しています。誰が一番速く走ったのでしょうか。



（ⅲ）　みかさんとえりさんは比べられる。みかさんとゆうたさんは比べられる。

（ⅳ）　えりさんとゆうたさんをどう比べるか考える。

［２］想起させたい学習

３人を速い順に並べようとしたときに、全員に共通して比べられるデータがあると便利である。それを考えたときに、１㎞進むに当たりかかる時間、または、１分あたりに進む道のりを求めておくと便利であることに気付く。そこで、５年生で学習した「単位量当たりの大きさ」の学習のことを想起させ、速さの意味を理解させたい。速さが、「単位時間当たりに進む道のり」を表していることは、このあとの時間で確認する。

［３］「単位量当たりの大きさ」と本時「速さ」の関係

５年生で「単位量当たりの大きさ」を学習したとき、広さも乗っている人数も違う２台のエレベーターの混雑具合を比較するには、１m^2あたりの人数や、１人あたりの面積を調べるとよい、ということを学習した。進んだ道のりもかかった時間も違うときに速さを比較する本時の課題は、これと同じである。そこで、「単位量当たりの大きさ」の学習が使えることを実感させたいと考えた。

また、１分あたりに進む道のりを調べておくと、例えばそれを 17 倍すれば 17 分間で進むことのできる道のりが求まる。このような使い方ができることも、「単位量当たりの大きさ」のよさであるといえる。これは、道のりを求める学習のときに活用することができる。

［４］授業のねらいと検証

①手順や方法を比べる

本時の課題では、３人の走る速さを比較する。もし、道のり、または時間が揃っていれば簡単に比較できる。例えば 100m 走では、道のりを全員 100m に揃えてあるから、かかった時間を見れば比較できる。この課題は、３人のうち２人は道のり、または、かかった時間が同じである。しかし、えりさんとゆうたさんの場合は、そのどちらも揃っていない。そこで、１分当たり、または、１㎞当たりに揃える考え方を出させたい。他に、時間を 30 分に、道のりを６㎞に揃える方法が出ると予想される。

こうして出された、速さを比較する方法のうち、１分当たり、１㎞当たりに揃えて比較する方法と、そうでない方法を「比べる」学習活動を行う。比べて考えることで、次のような「単位量当たりの

大きさ」の考え方のよさに気付く場面をつくろうとした。

㋐１分当たり、１km 当たりに揃えるという方法は、道のりも時間も揃っていない場合でも、大勢の人の速さを一斉に比較できる方法だといえる。

㋑１分当たりに進むことのできる道のりや、１km 進むに当たりかかる時間がわかれば、例えば 15 分でどれだけ進めるのか、23km 進むのにどれぐらいの時間がかかるのか、などをすぐに求められる。

㋑の考えは「比べる」視点を明確化することで出てきた。「単位量当たりの大きさ」の考え方を理解した場面といえる。㋐は３人とも道のりと時間が揃っていない例を提示する工夫をしたが出されなかった。

②一度学習した内容を想起する

速さの比較の方法を比べているときに、１分当たり、１km 当たりに揃える方法について考えることができれば、「単位量当たりの大きさ」で学習したことを使うことができたといえる。

実際の授業では、３人のうち誰が一番速いのかを考えているときに、「５年生のときにエレベーターの混雑具合で学習をしたことを使って、１分当たりに進める道のりを求めれば値が大きい方が速い。」「１km 進む当たりにかかる時間を求めれば値が小さい方が速い。」という説明をする子どもがいた。それを子どもが発表したことで、「５年でやったエレベーターの混雑具合の話と同じことが使える。」ことを改めてクラス全体に投げかけると、聞いてから考え出した子どもたちも、少しずつそれに気付いていった。５年生の知識を想起して使っている実感をもった場面であったと考えられる。

［５］考察

①「想起する」学習活動の場面づくり

「誰が一番速いか。ゆうたさんとえりさんではどちらが速いか。」を考えたときに「道のりを時間で割ればよい。」という意見が出た。しかし、「なぜ道のりを時間で割るとよいのか理由がわからない。」という質問が出たので、この質問に答えるように指示を出した。これにより、説明方法として５年生のエレベーターでの話を使う子どもが出て、「想起する」場面づくりができた。もし出てこなかった場合でも、「前にも似た考え方を学習しませんでしたか。」など発問して、想起する場面をつくりたい。

②「比べる」学習活動がもつ意味

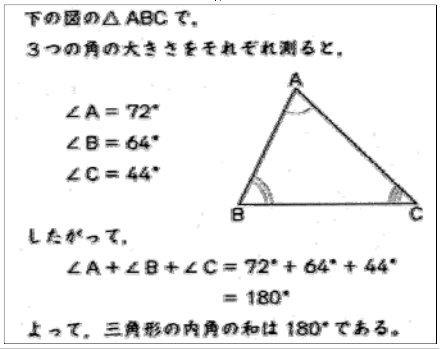
「想起する」学習活動のみで１時間は終わってしまい、「比べる」学習活動は次の授業で行った。

１時間目に「６km 当たり」の考え方をした子どもがいた。しかし、多くの子どもは「１分当たり」の考え方には気付いても、道のりを揃える考え方には気付かず意外だったようである。すると「時間を揃える」と「道のりを揃える」、という二種類の考え方があることに注目してしまった。この授業は「単位量当たりの大きさ」の考え方について理解することがねらいであり、「時間を揃える」と「道のりを揃える」について「比べる」ことは本意ではない。そこで２時間目は「１当たりに揃える」と「それ以外の数値に揃える」という二種類の考え方に注目させるため「１km 当たり」と「６km 当たり」の二つを比べてよさを考えさせたところ、次のような発言が得られた。

「もし、10km の道のりを進むのにどれぐらい時間がかかるのかを調べようと思ったときに、６km 進む当たりにかかる時間がわかっていても、10 は６の倍数ではないから難しい。１km 進む当たりにかかる時間がわかっていれば、それを 10 倍すれば求まる。このように、○○km 進むのにかかる時間を調べようと思ったときには、１km 進む当たりにかかる時間がわかっていた方が便利だと思う。」この発言は、「単位量当たりの大きさ」の考え方のよさを理解したものと考えられる。次の時間に「速さは単位時間に進む道のりで表す」と学ぶことを踏まえて、「１当たりに揃える」と「それ以外の数値に揃える」という二つの考え方を「比べる」ことが重要であったといえる。「比べる」学習活動は、それがどんな意味をもつのかを考えて設定することが大切である。

検証授業３（中学校２年生「証明」） （実施日：2011. 11. 17）

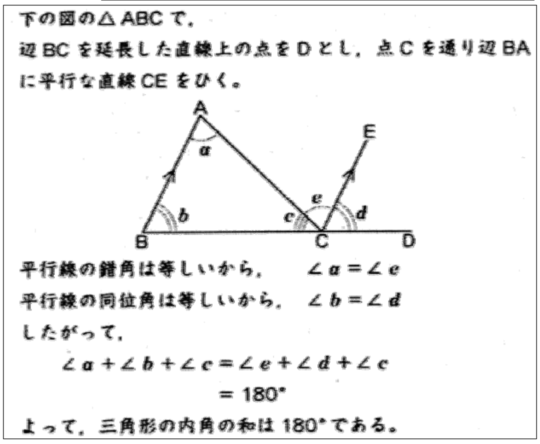
［１］「比べる」学習活動までの流れ



（ⅰ） 「三角形の内角の和は 180° である」この定理を学習したことを思い出す。

（ⅱ） 「実際に三つの角を測る。三つを加えると 180° になる。だから三角形の内角の和は 180° であるといえる。」という、実際に測ってたす説明（右上）を聞く。（小学校５年生の復習）

（ⅲ） その説明に対して、感想や意見をもつ。



（ⅳ） 中学校２年生になって学習した、この定理が正しいことをどのように説明したのかを思い出す（右下）。

（ⅴ） 実測による説明と、中２で学習した演繹的な説明、二つを「比べる」中で、それぞれのよさを考える。

［２］想起させたい学習

これまで中２で学習した様々な定理が、演繹的な説明によって確かめられてきたこと、例えば、「対頂角は等しい」では、どんな対頂角でも必ず等しいと説明したことを想起させたい。また、中学で学んでいる図形の定理のほとんどは、小学生のときに帰納的な説明の上に性質として学習してきたものである。このことも想起させたい。

［３］「帰納的説明方法」と本時「演繹的説明方法」の関係

小学校で図形の性質について学習するときには、長さや角度などを実際に測るなどして、帰納的な説明方法で確認してきていることが多い。実際に測っていくので、見た目にわかりやすいというよさや、こういった実測を繰り返すことで性質を発見したり予想を立てたりしやすいというよさがある。

一方、中学校で学習する演繹的説明方法である「証明」は、小学校で学習してきた性質が確かに正しいという確認ができる方法である。実測で確認する方法では、「もしかしたら、その性質には当てはまらない図形があるかもしれない。」という疑問が残ってしまうが、「証明」は、任意の図形に対して成立するとわかっている事柄のみを根拠にして進めるので、その疑問は残らない。小学生のときのように、いくつものパターンを試してみる必要はなく、例外なく正しいといえる方法である。

［４］授業のねらいと検証

①手順や方法を比べる

「三角形の内角の和が 180° である。」ことの説明として、実測を根拠にした帰納的方法と、中２で学習した演繹的方法の「証明」を比べてそれぞれのよさを考えさせた。

「比べる」学習活動は、小学校での学習と中２での学習に違いを感じられていない生徒に対して、違いを認識する視点をもたせられた。比べてそれぞれのよさを考えたときに、「証明」のよさとして、

・計算しないでよい。　・分度器で測る必要がない。　・習ったことが活用できる。

・どの三角形でもあてはまる（同じことがいえる）。　・理屈がわかるから納得できる。

といった意見が生徒から出された。演繹的方法と帰納的方法を「比べる」ことで、「証明」のよさを考えさせることができたといえる。

②一度学習した内容を想起する

平行線の性質を使った演繹的な説明の方がよいという考えをもつときに、例えば「対頂角は等しいことの説明では、すべての対頂角でいえる説明方法を考えた。」ということを想起し、それと同様にすべきだと考えることを期待した。しかし、実際には、今までの具体的な学習を想起して説明する様子は見られなかった。

これについては、今後の課題といえるが、例えば、二等辺三角形の二つの角の大きさが等しいことについて、小学校の教科書における扱いと中学校の教科書における扱いを比べるということが考えられる。それにより、演繹的な説明の必要性を感じ、証明の意義についてより理解させることができるのではないかと考えられる。

［５］考察

反復（スパイラル）して改めて学習することにより、新たなことに気付くことがあったり、他の学習内容と関連付けて理解できたりすることは多い。その意味で、少し前の学習や小学校での学習を想起する場面をつくることは、価値があったといえる。

演繹的である証明を学習した今だからこそ､小学校では帰納的説明だったということが理解できる。また、帰納的説明と関連付けた（よさを比べた）ことで、今学習している演繹的説明のよさについても理解できる。このように、反復（スパイラル）の学習においても「比べる」「想起する」学習場面が生かされるという意識を教師がもつことも大切だろう。

検証授業４（中学校２年生「１次関数の特徴」） （実施日：2011.12.13）

［１］「比べる」学習活動までの流れ

※前時までに、次の内容は学習済み。

・y が x の関数であり、y＝ax＋b（a,b は定数）で表せるとき、y は x の１次関数であるという。

・y＝ax＋b のグラフは、y＝ax のグラフを y 軸の正の方向に b 平行移動したものである。

（ⅰ） 比例の特徴を復習。(x＝0 のとき y＝0、グラフは原点を通る直線、
x が２倍, ３倍…のとき y も２倍, ３倍…となる、増え方が一定)

（ⅱ） 平成 23 年度全国学力･学習状況調査の問題を参考にした郵便料金表を見る。

重量	50 g まで	100 g まで	150 g まで	250 g まで	500 g まで	1 kg まで	2 kg まで	4 kg まで
料金	120 円	円	円	240 円	390 円	円	円	円

（ⅲ） 重量と料金が１次関数の関係になるために、空欄にどんな値が入ればよいか理由とともに考える。

（ⅳ） どのようにして表を完成させたのかを説明する。

（ⅴ） 比例と比べて、同じところと違うところを考える。

［２］想起させたい学習

本時は、１次関数の特徴の理解をより深めるために、比例の特徴を想起させることで、その違いを比較することとした。授業の冒頭で比例の特徴についての復習をすることで、この内容を想起しやすくした。

また、（ⅴ）の比例と１次関数を比べる学習では、次のような点に注目してほしい。比例では x の値に対応して y の値は２倍, ３倍…に必ずなる、料金＝重量×定数に必ずなるという点である。比例では必ずなるのだが１次関数の場合はそうはならないことを、比例の特徴を想起することによって理解させたい。

［３］「比例」と本時「１次関数」の関係

比例は１次関数の特殊な形で、y＝ax＋b の b が０の場合でありよく似ている。共通した点と異なる点を明確にすることで、y＝ax+b という式がどのような手順で出てきたのかを理解することにつながる。

比例では、例えば x が１増加するあたりに y が３増加する場合、x が 1 から 6 まで「5」増加したとき y は 3 から 18 まで「15」増加する。このとき x の値 1 と 6、y の値 3 と 18 はともに６倍の関係にある。これは x＝0 のとき y＝0 だからである。もし x＝0 のとき y＝1 だったら、x が 1 から 6 まで「5」増加したとき y は 4 から 19 まで「15」増加し、y の値 4 と 19 は６倍の関係にはない。しかし、増加量を見ると、どちらも x が「5」に対して y は「15」で、「5」と「15」は３倍の関係にある。

＋5　×6

x	0	1	2	3	4	5	6	…
y	0	3	6	9	12	15	18	…

＋15　×6

＋5　×6

x	0	1	2	3	4	5	6	…
y	1	4	7	10	13	16	19	…

＋15　~~×6~~

これは、どちらも x が１増加するあたりに y が３増加するからである。よって、y＝1＋3x という式が出てくる。このことを理論的に説明できることまで求める必要はないが、比例が１次関数の特殊な形であること理解するために、比例と１次関数の関係を踏まえた上で y＝ax＋b という式を学ぶことは大切である。

［４］授業のねらいと検証

①手順や方法を比べる

比例と１次関数の特徴を比べることで、１次関数の y＝ax＋b という式やグラフの形を形式的に覚えるのではなく、特徴をとらえる手順を理解させたい。

１次関数になる表を完成させる（ⅲ）の活動では、比例と１次関数の違いがわからず、右のように「×２」などと書いている子どもが多くいた。これが徐々に「＋250」と書くようになっていった。表の横の変化を見ていくときに「×?」ではなく「＋?」と見ていく必要があることに気付いたといえる。比例との違いという視点で整理することができたと考えられる。

×２

重量	50	100	150	250	500	1kg	2kg
料金	120			240	390		

また、完成した表を見て、重量と料金の関係を y＝ax＋b で表そうと、b の値を求めようとする子どもが出てきた。その子どもは、y＝ax＋b の x ， y に値を代入して求めるのではなく、「＋?」の考え方を用いて x＝0 のときの y の値を求めようとしていた。比例との違いという視点から１次関数の特徴を理解し、「＋?」の考え方が有用であると感じたものと考えられる。

②一度学習した内容を想起する

比例と１次関数の違いについて、子どもたちの記述には、「x が２倍のときに y も２倍とは限らない」や「x が０のとき y も０とは限らない」といったものが見られた。比例の特徴を想起して、それと関連付けて整理することができたといえる。一度学習した比例の特徴を使って１次関数の特徴を理解したという実感につながったのではないだろうか。

［５］考察

表の横の変化について考えたとき、「×?」という見方は比例のときにしかできないこと、「＋?」という見方ならば比例でも１次関数でもできることに気付くという反応が見られた。今回、与えた表で重量を横に見たとき、値は「×?」という変化について考えたくなるような表であった。これにより子どもたちは、「×?」という考え方がなぜうまくいかないのだろうかとよく考えていた。課題の工夫によって、学習活動が手順や方法を理解することに生かされるのである。

Ⅲ　研究のまとめ

１　研究を通して見えてきたこと

「比べる」「想起する」学習活動は、これまでも大切にされてきたことである。本研究では、その学習活動を「確かな知識を身に付ける」という視点で考えた。四つの実践を通してこの学習活動が「確かな知識を身に付ける」ためにも有効であることがわかってきた。

さらに見えてきたこととして、「比べる」「想起する」の学習活動には二つの側面があることが挙げられる。それは**「どちらがよいかを考える」**という側面と、**「それぞれのよさを考える」**という側面である。今後は授業作りの視点としてこれらのことを考慮していく必要があると考えられる。

（１）二つの側面とは

①どちらがよいかを考える

検証授業３は、三角形の内角の和が 180°であることの説明として、平行線の性質を使った演繹的な説明と、三つの角を測って説明する方法を比較する学習である。ここでは、演繹的な説明の必要性を理解することが求められる。検証授業１は、18 個のあめ玉を６個ずつ袋にわけると何袋になるか、という課題を考えたときに、わり算の式で表す方法と、かけ算の式で表す方法を比較する学習である。求めるのは「何袋になるか」であることを考慮すると、わり算の式がふさわしいことを理解する必要がある。

②それぞれのよさを考える

検証授業２では、速さを比較するときに、１㎞当たりに揃える考え方、１分当たりに揃える考え方、６㎞当たりに揃える考え方、30 分当たりに揃える考え方などがあるが、そのときの状況や値によってそれぞれに利点があり、どれに対してもよさを知っていくことが大切である。検証授業４は、１次関数の形にできあがった表を見て比例との違いを考える。重さが２倍のときに料金が２倍にはなっていない、常に料金が重さの定数倍になっていない、などの見方で比例ではないことを確かめられるが、どの確かめ方も理解していくことが大切である。

（２）それぞれの側面に適した指導とは

二つの側面において、どんな指導の必要性があるのかを考えた。以下のような視点で子どもたちに働きかけることが大切である。

①どちらがよいかを考える授業

検証授業３は、角度を測って説明する方法では、どの三角形についてもいえる説明にはなっていないことを理解することが必要である。検証授業１では、求めたいものが全部のあめ玉の個数ではないので、この課題を式で表すにはかけ算の式よりもわり算の式の方がふさわしいことを確認したい。

このように、どちらがよいかを考える授業では、適さない方はなぜ適さないと考えられるのか、その理由を考えさせる働きかけを取り入れた指導が必要である。「どうして角度を測る説明はダメなの？」「どうしてかけ算の式ではダメなの？」という投げかけが考えられる。

②それぞれのよさを考える授業

検証授業２は、次の時間以降では１分あたりの考え方を使っていく。しかし、６㎞あたりに揃える方法の方がわかりやすい状況もある。検証授業４では、いくつかの比例の性質のうち、どれを用いても比例ではないことは確認でき、どの性質も知っていることが必要である。

このように、それぞれのよさを考える授業では、一つの方法だけでなく、それ以外の方法についてもどんなよさがあるのか、どんな特徴があるのかを考えさせる指導が必要である。「○○さんのやり方をみんなで考えてみよう」「このやり方のよさは？」といった投げかけが考えられる。

２　おわりに

本研究は、確かな知識を身に付けるために、手順や方法を理解するために「比較する」学習場面のある授業、身に付けた知識を使っているという実感をもてるような「想起する」学習場面のある授業づくりの視点として研究を進めてきた。

「比較する」「想起する」という学習場面を授業の中に設定することは、算数や数学の知識を形式的なものとしてではなく手順や方法の理解を伴った確かな知識としてとらえることにつながると考えられる。また、自分たちが身に付けている知識が使われていることを実感することは、算数･数学を学習するよさを知ることにもつながると考えられる。

2008 年１月 17 日の中央教育審議会答申「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」の５－（２）「生きる力」という理念の共有（ｐ．22）には、次のようにある。「変化の激しい社会で自立的に生きる上で重要な能力であるものの、我が国の子どもたちにとって課題となっている思考力･判断力･表現力等をはぐくむためには、各教科において、基礎的・基本的な知識・技能をしっかりと習得させるとともに観察・実験やレポートの作成、論述といった知識・技能を活用する学習活動を行う必要がある」と示されている。本研究では、まさに活用できる知識にするための指導の工夫について考えてきた。その意味では、算数･数学において「生きる力」をはぐくむことにもつながるものである。

最後に、研究を進めるに当たり、ご支援、ご助言をくださいました講師の先生方、また校長先生を始め学校教職員の皆様に、心より感謝し厚くお礼を申し上げます。

【参考文献】

片桐重男『新版　数学的な考え方とその指導　第２巻　指導内容の体系化と評価』明治図書出版　2004 年
杉山吉茂『力がつく算数科教材研究法』明治図書出版　1990 年
玉置崇　意味理解にこだわる　「教育科学　数学教育」　No.643　明治図書　2011 年５月

【指導助言者】

玉川大学教職センター教授（教職担当）　下田　照雄
川崎市立中学校教育研究会数学科部会長（川崎市立西生田中学校長）　大串　一彦
川崎市立小学校算数教育研究会長（川崎市立久地小学校長）　小田川　弘文
川崎市総合教育センター指導主事　榎原　真也