小・中の系統性を踏まえた指導の研究

— 関数の系統的な指導を考える —

算数・数学科研究会議
研究員　向井　たか子（川崎市立久末小学校）　遠宮　明治（川崎市立長沢中学校）
勝田　知弘　（川崎市立片平小学校）　熊谷　洋一（川崎市立南大師中学校）
指導主事　宮嶋　俊哲

Ⅰ　主題設定の理由

小・中学校間の円滑な接続が求められている。そのため教師は、その指導にあたり、児童生徒がどのように学んできたかを把握することが重要である。特に、算数・数学においては、教科の特性として、系統性が大切であると言われている。しかし、指導する内容については、学習指導要領解説編や教科書を参考につながりを把握することができるが、そこでの指導方法が本当に中学校で有効に機能しているかまでは、検証が不十分なように思われる。そこで、研究主題として、「小・中の系統性を踏まえた指導の研究」とした。

中学校数学科では、「数と式」「図形」「関数」「資料の活用」４つの領域から構成されている。そのなかでも、「関数」領域は苦手としている生徒も多く、全国や川崎市の学習調査においても、課題が報告されている。一方、小学校では、「数量関係」の領域において、中学校の「関数」につながる内容として、４年生で、「伴って変わる２つの数量の関係」、５年生で、「簡単な比例関係」、６年生で、「比例と反比例」を学習する。「比例」の学習は、高学年になってからであるが、「比例の考え」を背景にして学習を進める内容は、２年生から始まっている。また、「割合」「速さ」「単位量あたりの大きさ」などを苦手とする児童は多く、これらを理解するためにも、「比例の考え」は重要である。そこで、小・中の系統性を踏まえた指導を中学校の「関数」領域に焦点を当て、研究を進めることにした。

Ⅱ　研究の内容

１　課題設定の工夫

関数の指導では、具体例な事象から２つの数量の関係を表に表すことでその特徴を捉え、そこから式に表し、グラフに表すという学習が一般的である。そのため、グラフが最後に扱われることが多く、グラフの考察から事象を読み取るという学習が少なくなりがちである。表・式・グラフを関連付けるためには、それぞれから適切に事象の特徴を読み取ることができる力が必要である。そこで、意図的にグラフの考察から事象の特徴を捉え、表や式に表す学習を取り入れることが効果的であると考えた。最初に、グラフを示し、グラフの考察から具体的な事象や式の特徴を捉えていく課題を設定することにした。そのことにより、子ども達が主体的にグラフの特徴を捉え、式との関係などを考え、自ら課題を設定すると考えたからである。

２　表・式・グラフを関連付ける

中学校学習指導要領解説数学科編では、「表・式・グラフを相互に関連付けて関数について調べる能力を伸ばす」ことが記されている。表・式・グラフを単独で用いるのではなく相互に関連付けて関数の特徴を捉えることが重要である。そのためには、小学校の段階から、表・式・グラフのそれぞれから特徴を読み取ったり、読み取った特徴をもとに関連付けたりするような学習を進めていくことが有効であると考えた。

3　検証授業①　小学校4年「変わり方」

（1）　課題の工夫

教科書では、２つの数量関係を調べる場合、具体的な事象から２つの数量の関係を表に表し、変化のきまりを見つけ、それをもとに式やグラフに表している。教科書の課題は「正三角形の１辺の長さを変えていくときの、周りの長さをしらべましょう。」である。

グラフの読み取りから入ることで、課題に対して興味をもって意欲的に取り組み（グラフを進んで読み取ろうとする態度)、グラフを読み取る力や、読み取ったことを表や式、図に関連付けることができる力をつけたいと考えた。グラフを見せて、「どの図形の変わり方を表しているのでしょうか。」という課題を設定した。活動を通して、グラフの特徴から事象とグラフを関連付けて考える力が付くと考えた。

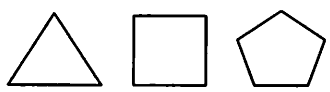
（2）表・式・グラフを関連付ける

学習活動と児童の反応（・）

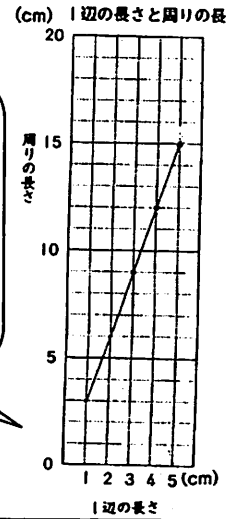
Ⅰグラフからの読み取り

1辺の長さが変わるときの周りの長さの変わり方を表したグラフです。

このグラフは，どの図形の変わり方を表しているでしょう。



正三角形　　正方形　　正五角形



- 「1辺の長さと周りの長さ」についての表だ。
- 横軸は1辺の長さ，縦軸は周りの長さを表している。
- 昨日のグラフと違う。右上がりの直線だ。
- 1辺の長さも周りの長さも，どんどん増えている。
- 点をみればいいんじゃないの。

「表題」「縦軸」「横軸」「右上がりの直線」などの言葉から，これまで学習した「折れ線グラフ」や，前時の学習をいかして，グラフを読み取ろうとしていることが分かった。

グラフをどうやってみたらいいかな？

Ⅱ表に整理する《表とグラフを関連付けて考える》

- 1辺の長さが１ｃｍのとき，周りの長さが3㎝だ。
- １のとき３，２のとき６，３のとき９…
- 表に整理して表してみよう。

読み取っていくうちに、たくさんの数を整理しようという考えから、表に表した。

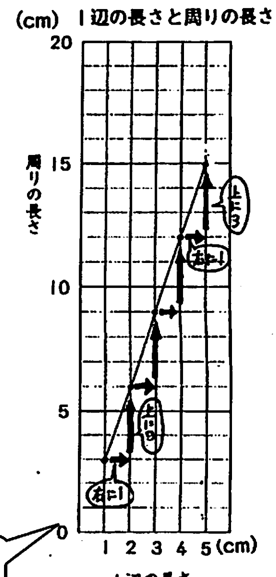
1辺の長さ（cm）	1	2	3	4	5
周りの長さ（cm）	3	6	9	12	15

- 1辺の長さが1㎝ずつ増えている。
- 周りの長さは3㎝ずつ増えているよ。
- 1辺の長さが１ｃｍ増えたら，周りの長さが3㎝増えるということだね。
- 周りの長さが３ｃｍずつ増えているから，三角形じゃないかな。
- 周りの長さが３ｃｍずつ増えるということが，表で説明できるよ。

1ふえる

1辺の長さ（cm）	1	2	3	4	5
周りの長さ(cm)	3	6	9	12	15

3ふえる

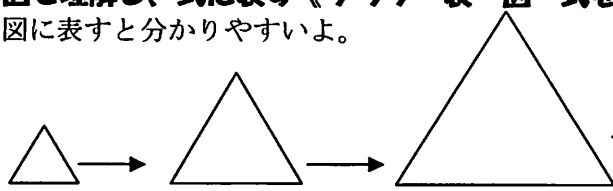


- それをグラフで見ると、右に１つ増えたら、上に３つ上がるところだね。

表を横方向に考察してみつけた関係を、グラフにもどって、「右に」「上に」という言葉を使って変化のしかたを表し、関連づけることができた。

Ⅲ図で理解し、式に表す《グラフ・表・図・式を関連付けて説明する》

・図に表すと分かりやすいよ。



1 c m　　2 c m　　3 c m

> グラフを読み取ることができても、図形の変わり方をイメージすることができなかった児童にとって、図で表すことで変化の様子が視覚的にとらえることができ、理解が深まった。

・1辺が１ｃｍのとき，周りの長さは、１＋1＋１で３ｃｍ。
・1辺が２ｃｍのとき，周りの長さは、２＋２＋２で６ｃｍ。
・かけ算でできるよ。1辺が３ｃｍのとき、周りの長さは、
　３×３で９ｃｍ。
・次は、４×３で１２ｃｍだ。
・表を縦にみると、全部３倍になってるよ。

> 表で表したときに、横方向にしか考察することができなかったが、図に表して周りの長さを除法の式で求めたときに、「表でもその関係（×３）がある。」と表を縦方向に考察することができ、式に表した。

3倍

1辺の長さ（cm）	1	2	3	4	5
周りの長さ（cm）	3	6	9	1 2	1 5

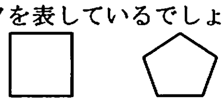
・辺の数が３つだから、×３になるんだね。
・このきまりを言葉の式にすると，1辺の長さ×３＝周りの長さだ。
・１辺の長さを○、周りの長さを△として式に表すと、　○×３＝△　だね。
・どの考え方にも、「３」が関係しているよ。グラフからも表からも、「３ずつ増える」ことがわかった。だから，やっぱり三角形だよ！
・四角形だったら、周りの長さが４㎝ずつ増えるから、四角形じゃないよ。
・だったら、辺が５本ある図形も周りの長さが５㎝ずつ増えなくちゃいけないから、違うよね。

> ×３が、グラフでも「３つずつ増えている。」ことで表されていることが確認できた。

（まとめと振り返り）

・グラフを見たら、一方が増えると、もう一方も増えることがわかる。
・横軸と縦軸の関係が、三角形の１辺の長さと周りの長さの関係を表していたので、そのめもりをちゃんとよむとわかる。
・横軸の目盛りからよむと、１・２・３・・・と数が増えるので、増え方がわかった。
・点を表に整理すると、２つの数の関係がわかりやすかったよ。
・２つの数の増え方にきまりがあったから、言葉の式や、○や△を使った式に表すことができた。
・式に表すと、図形がもっと大きくなってもすぐに１辺の長さがわかるから、便利だ。
・グラフと、表と、図、式は、全部つながっていたよ。
・別の図形のグラフや表を作ってみたいな。

（適応問題）

> このグラフはどちらの図形のグラフを表しているでしょう。
>
> 

> ○まとめ〔板書〕
> ・グラフで横に（１辺の長さが）１ふえると、たてに（周りの長さ）が３ふえる。
> ・３ずつふえるという「ふえ方のきまり」があった。
>
> だから、正三角形を表しているグラフだ！

（３）　成果と課題

成果としては、自力思考の時間を十分に確保してグラフを読み取ることで、グラフの縦軸と横軸から点を読み取ることができるようになった。また、その読み取った数値を書き出し、整理することで、関係性を見つけ出したり、図に表したりすることができた。子どもたち自身が図に表すことで、「変わり方」をよりイメージすることができたと考える。また、課題設定を工夫することにより、正三角形を正方形や正五角形と比較することで、正三角形であることの理由の説明がしやすくなった。そして、辺の数に注目することができ、式に表わすときの手だてにもなった。ふり返りの児童の言葉に「グラフと、表と、図、式は、全部つながっていてすごいと思った。」という言葉があった。関連付ける考えることの楽しさを感じることができたのではないかと思う。

課題としては、グラフからの導入は、グラフを読み取る経験が少ないためか、始めはグラフをどう見ていいのかとまどっている児童もいた。前時でのグラフの扱い方が重要であると感じた。

4　検証授業②　中学２年　「１次関数の値の変化とグラフ」

（１）課題の工夫

教科書では，１次関数を定義してから、１次関数のグラフと比例のグラフの関係、変化の割合、切片、傾きを学習したのち、グラフのかき方，１次関数の式の求め方を学習するという単元計画になっている。この単元計画では、グラフから事象や式を捉える学習が不足していると考え、１次関数のグラフと比例のグラフの関係の前に１次関数のグラフの考察から式を考える授業を位置づけた。

グラフを見せて、「どの式を表しているのでしょうか。」という課題を設定した。グラフから式を選ぶことで、グラフの傾きやグラフとｘ軸、ｙ軸との交点などに着目し、そのことが１次関数の式を決定することにどのような関係があるのかを考えさせた。また、「なぜそのように考えたのか」という根拠を問うことで、切片や変化の割合、傾きといった学習につながると考えた。

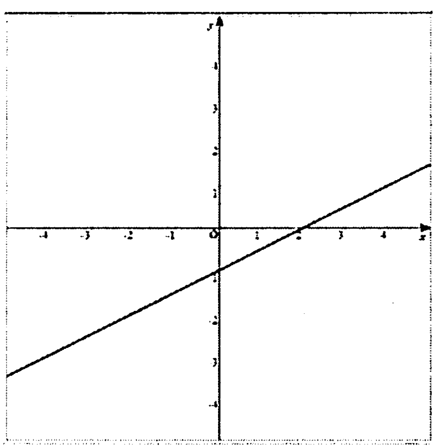
（２）表・式・グラフを関連付ける

学習活動と生徒の反応

確認事項　１次関数の式は　$y = ax + b$　の形で表される。

Ⅰ．グラフから式を考える（個人）

課題



上の直線のグラフは、どの式を表わしていますか？！

ア. $y=2x+2$　**イ.** $y=2x-1$　**ウ.** $y=\frac{1}{2}x+2$　**エ.** $y=\frac{1}{2}x-1$

１次関数の式が $y = ax + b$ の形で表わされることは確認できていた。
グラフの形が直線になることは既習事項ではなかったが抵抗なく選択肢から答えを選ぼうとしていた。

Ⅱ．グラフから式を考える（グループ）

ア．２人　　イ．15人　　ウ．２人　　エ．13人　となった。
グラフが「x 軸と２で交わっている」「y 軸と−1 で交わっている」というところから式にも２と−1 が出てくるだろうと直感的に考える生徒が多いようだった。

・表で考えるとエ．の　$y=\frac{1}{2}x-1$ は…

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	$-\frac{3}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0

x が２増えると、y が１増えている。x が０のとき，y は‐１です。
だから答えはエ．の $y=\frac{1}{2}x-1$ になります。

このような流れで理由を述べるのを期待していたが、実際は
「エ．以外の１次関数の式にグラフの座標を代入しても成り立たない。エならば成り立つ」

「すべて代入した」　ｘ軸，ｙ軸に−1と２で交わっているからイ

Ⅲ. まとめ（１次関数のグラフ、式、表「x，yの対応」を関連付けて考える。）

グループによる話し合いの中でほとんどのグループが課題の答えはエ．の　$y=\frac{1}{2}x-1$　になりそうだと考えた。

エ．の　$y=\frac{1}{2}x-1$　が正解だという理由の説明で、比例の式　$y=\frac{1}{2}x$　のグラフを考え、y軸の方向に－１平行移動すれば$y=\frac{1}{2}x-1$になるという説明をする生徒も出てきた。

選択肢の各式にグラフの格子点にある点のx座標，y座標を代入して等式が成り立つか確かめたり、グラフがx軸，y軸と交わる点に着目して深く１次関数の式とグラフの関連性を考えていた。

（３）成果と課題

成果としては、グラフの考察から式を考えることから始めたので、１次関数の値の変化に関する特徴に関心をもち、表・式・グラフを使って考えようとしていた。生徒が主体的にグラフや表・式について深く考えていく授業展開になっていた。

グラフから式を選ぶ活動では、イ．ｙ＝２ｘ－１とエ．ｙ＝１／２ｘ－１を選ぶ生徒が半数ずついた。正解のエを選ぶ生徒がほとんどであると予想していたが、イを選ぶ生徒が多い結果となった。これは、「ｘ軸との交点（２，０）から、ａを２である」と考えていたからである。そこから、「なぜ、ｙ軸との交点（０，－１）からｂの値が－１であることに対して、ａの値は、ｘ軸との交点から（２，０）から２としてはいけないのか」ということを考えさせ、その理由を説明することを促した。

また、直線の格子点に着目し、格子点上の点が右に２進むと上に１上がるから、ａの値が１／２になると説明している生徒もいた。先行学習により、知識として持っているようであったが、このときも「なぜ、グラフをそのようにみれば、ａの値がでるのか」といこうことを考えさせた。そのような活動を通して、説明することができなかった生徒が、表から傾きの関係を見つけようとしたりするなど、より深く理解しようとする態度も見られた。まとめの段階では、比例のグラフとの関係性（次時の内容）から１次関数のグラフを説明しようとする生徒も見られた。

授業を通して、切片や傾きについてグラフから予想を立て、生徒が主体的に活動したことにより、傾きや切片等の未習事項も感覚的にその存在をとらえ、その後の授業での指導に効果的であった。

課題としては、表への関連付けが難しかったことが挙げられる。授業の最初に、エを選んだ生徒の、「直線上の点を式に代入する」という考えを取り上げたために、その考えに全体が傾いてしまったからである。代入の考えにより判断しているときには、代入により正解を選ぶことはできるが、「どの点を代入しても本当に成り立つかどうか」を考えさせることにより、生徒がｘとｙの対応表を作って考えてみようと思うような手立てが必要であった。

Ⅲ　研究のまとめ

1　成果

（1）課題を工夫する

グラフの考察から具体的な事象や式の特徴を捉えていく課題を設定することにより、授業を1時間で考えるのではなく、単元全体を見直して、授業を組み立てることができた。教師が前後のつながりを意識して授業をすることで、子どもたちは、自ら課題を設定し、解決への見通しをもつことができた。また、グラフのどこをみればよいのかという視点をもって、グラフの読み方やかき方を振り返る子どもの姿も見られた。

（1）表・式・グラフを関連付けるためにグラフを考察する

中学校の「関数」領域における小・中の系統性を踏まえた指導の方法は、小学校、中学校を通して、具体的な事象から、表に表し、式に表し、グラフにするという一連の学習が繰り返されることが見えてきた。「関数」領域では、2つの変数をグラフに表すことで視覚化することがよさと言える。ところが、グラフから表現されたことを読み取る学習は、主に活用場面で扱われることが多い。そこで、十分に知識や技能を習得する前に、グラフを考察する授業を位置づけた。グラフを考察することにより、以前は、グラフの見方を教師が教えていたという受け身の学習から、子どもがグラフのどこを見ればよいのかを見つける主体的な学習へと変えることができた。また、グラフの考察により、グラフと表や式を関連付けることができるようになった。

2　課題

（1）他学年での検証

今回、小学校4年生と中学校2年生で検証授業を行った。小学校4年生、中学校2年生では、グラフの考察からの指導が有効であることが見えてきた。その間をつなぐ、5年生、6年生、中学校1年生で、グラフの考察からの授業が有効に機能するのかをさらに検証していく必要がある。

（2）比例の考え方の活用

「割合」「速さ」「単位量あたりの大きさ」などを苦手とする子どもは多く、これらの学習を理解するためにも、「比例の考え」は重要であると考えた。しかし、それらの学習と「比例の考え」がどのように機能するかまで研究を深めることができなかった。表、式、グラフを関連付けることがこれらの学習の理解にどのように働いて行くのかを検証していきたい。

最後に、研究を進めるに当たり、ご指導、ご助言をいただきました先生方、また、研究をご支援いただきました所属校の校長先生をはじめとする教職員の皆様に、心からお礼申し上げます。

【参考文献】

国立教育政策研究所　『全国学力・学習状況調査から4年間の調査結果から今後の取り組みが期待される内容のまとめ（小学校編・中学校編）』　教育出版　2012年9月

【指導助言】

横浜国立大学教育人間科学部　准教授　両角　達男
川崎市立小学校算数科教育研究会長（川崎市立西生田小学校長）　高橋　千春
川崎市立中学校教育研究会数学科部会長（川崎市立はるひ野中学校長）　大串　一彦